Exercice 1
On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (x + y, xy)$

a) Montrer que f est de classe C^∞. Calculer la différentielle de f en (x, y). Déterminer l'ensemble S des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ en lesquels $\mathrm{d}f_{(x,y)}$ est inversible.

b) Calculer $f(\mathbb{R}^2)$. L'application f est-elle un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$? L'application f est-elle un difféomorphisme de S sur $f(S)$? Trouver un ouvert connexe maximal U de $\mathbb{R}^2$ tel que f soit un difféomorphisme de U sur $f(S)$.

Exercice 2

a) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. Montrer qu'il existe des fonctions $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x)$$

On souhaite remplacer $\mathbb{R}^n$ par un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, donner des hypothèses sur U pour lesquelles le résultat est toujours valable;

b) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que $f(0) = 0$ et $\mathrm{d}f(0) = 0$. Montrer qu'il existe des fonctions $h_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ telles que $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \sum_{i,j} x_i x_j h_{i,j}(x)$$

c) Montrer que $I = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \quad f(0) = 0\}$ est un idéal maximal de $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ de type fini, principal pour $n = 1$.

Exercice 3 On munit l'espace $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque et on note B_r la boule de centre 0 et de rayon r. Soit f un C^1 difféomorphisme entre deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. On supposera pour simplifier que $f(0) = 0$.

a) Soit $\epsilon \in]0, 1[$ fixé. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $x \in B_R$,

$$\|\,\mathrm{d}f(0)^{-1}(f(x)) - x\| \leqslant \epsilon \|x\|$$

b) Montrer qu'il existe $R' > 0$ tel que, pour $0 \leqslant r \leqslant R'$,

$$(1 - \epsilon)\,\mathrm{d}f(0)(B_r) \subset f(B_r) \subset (1 + \epsilon)\,\mathrm{d}f(0)(B_r)$$

Indication : Pour la première inclusion, observer que $f(B_R)$ est un voisinage de 0.

c) Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ dont on admet qu'elle satisfait la relation $\lambda(AX) = |det(A)|\lambda(X)$ pour tout ensemble Lebesgue-mesurable X et toute application linéaire $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer alors que :

$$|det\,\mathrm{d}f(0)| = \lim_{r \to 0} \frac{\lambda(f(B_r))}{\lambda(B_r)}$$