TD 14
Optimisation

Exercice 1

Soient $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, et $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) =< a, x > e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}$.

1. Démontrer que f est deux fois dérivable.

2. Déterminer, en fonction de a, les points critiques de f.

3. A l'aide de la condition suffisante du second ordre, déterminer la nature de l'un des points critiques de f.

Exercice 2

Exprimer la moyenne de n points dans $\mathbb{R}^d$ en terme de minimisation.

Exercice 3

On considère E égal à l'ensemble $\mathbb{R}^d$ privé de $\{x \in \mathbb{R}^d \quad | \quad \exists i : \quad x_i = 0\}$. On note $N_1(x) = \sum_i |x_i|$ et $N_2(x) = \sqrt{\sum_i x_i^2}$.

1. On note $F_C = \{x \in E \quad | \quad N_1(x) = C\}$. Peut-on minorer N_2 sur F_C ? Et la majorer ? (si oui donner les extrema).

2. On note $G_C = \{x \in E \quad | \quad N_2(x) = C\}$. Peut-on minorer N_1 sur G_C ? Et la majorer ? (si oui donner les extrema).

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de sa norme euclidienne $\|M\|_2 = Tr(M^T M)$. Montrer que $SO_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $SL_n(\mathbb{R})$ de norme minimale.

Exercice 5

On considère un rayon lumineux se déplaçant dans un plan et reliant deux points A et B situés de part et d'autre d'une courbe $\mathcal{C}$ (supposé être une sous-variété de dimension 1) délimitant deux milieux d'indices de réfraction respectifs $n_1 = \frac{c}{v_1}$ et $n_2 = \frac{c}{v_2}$. En admettant que la lumière suit le principe de Fermat (ie qu'elle minimise la durée du trajet parmi toutes les trajectoires possibles), prouver la loi de réfraction de Descartes en utilisant le théorème des extrema liés. De la même manière, lorsque $\mathcal{C}$ est cette fois-ci un miroir et que A et B sont situés du même côté, prouver la loi de la réflexion d'un rayon lumineux.

Exercice 6

Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace euclidien de dimension n et $\mathbb{B}$ une base orthonormée de E.

1. Montrer que l'application $f : (v_1, \dots, v_n) \in E^n \mapsto \det_{\mathbb{B}}(v_1, \dots, v_n)$ atteint son maximum sur l'ensemble $X = \{(v_1, \dots, v_n) \in E^n, \quad |v_i| = 1\}$ et que le maximum est strictement positif.

2. Démontrer que si le maximum est atteint en $(v_1, \dots, v_n)$ alors les $(v_1, \dots, v_n)$ forment une base orthonormée de E.

3. En déduire l'inégalité d'Hadamard, pour tout $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$, on a $|\det_{\mathbb{B}}(v_1, \dots, v_n)| \leq |v_1| \cdots |v_n|$. Quand a-t-on l'égalité ?

Exercice 7

Soit $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x > 0, y > 0, z > 0\}$ et
$M = \{(x, y, z) \in \Omega, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x - y - z = 0\}$.

1. Montrer que M est une sous-variété non vide dont on donnera la dimension.

2. On considère la fonction f définie sur Ω par $f(x, y, z) = x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}$. Donner une condition nécessaire pour qu $u \in M$ soit un extremum de f.

3. Soit $\lambda < 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $\varphi(t) = 1/t^2 + 2\lambda t - \mu$ admet un unique zéro positif. En déduire que f admet un seul extremum sur M et le déterminer.