TD 15
Optimisation

Exercice 1

Soient A, B et C trois points du plan non alignés.

1. Montrer que l'application $\Phi : M \mapsto MA+MB+MC$ est strictement convexe.

2. Montrer que l'application Φ admet un unique minimum.

3. Soit M_0 le point où ce minimum est atteint. A-t-on $\mathrm{d}_{M_0}\Phi$?

Exercice 2

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa norme euclidienne.
Soit $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad z^2 + xy = 0, \quad x^2 + y^2 = 1\}$.

1. Quelle est la nature de l'ensemble A ?

2. Déterminer les points de A les plus proches de $(0, 0, 0)$.

Exercice 3

Soit B une matrice symétrique définie positive de $\mathbb{R}^n$. Soient $r \in \mathbb{R}$ et $a, \alpha \in \mathbb{R}^n$, on pose $C = \{X \in \mathbb{R}^n \quad | \quad < BX, X >= r^2\}$ et $F : X \in \mathbb{R}^n \mapsto < a, X > +\alpha$.
Peut-on minimiser F sur C ?

Exercice 4

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la surface S d'équation $x^4+y^4+z^4=1$. Déterminer les points de S les plus éloignés de l'origine $(0,0,0)$ (pour la distance euclidienne).

2. Plus généralement, soient $q \geq p > 1$. Donner la valeur maximale de $\sum_i^n |xi|^p$ sous la contrainte $\sum_i^n |xi|^q = 1$.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant la propriété suivante

$$\exists \alpha > 0 \quad | \quad \forall x, y \quad < \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y > \geq \alpha \|x - y\|^2$$

1. A l'aide d'une formule intégrale de Taylor avec reste intégral, démontrer que pour tout x,y on a $f(y) - f(x) - < \nabla f(x), y - x > \geq \frac{\alpha}{2}\|y - x\|^2$.

2. En déduire que f est coercive.

3. Que peut-on en conclure sur le problème de minimisation de f ?

4. Pour x^0 donné, on définit la suite x^k par $x^{k+1} = x^k - \rho_k \nabla f(x^k)$ où ρ_k (que l'on ne cherchera pas à déterminer) est tel que

   $$f(x^k - \rho \nabla f(x^k)) = min_{\rho \in \mathbb{R}^+} f(x^k - \rho \nabla f(x^k))$$

   Vérifier que si a est une solution du problème de minimisation, $\alpha \|x^k - a\| \leq \|\nabla f(x^k)\|$.

5. Montrer que $< \nabla f(x^{k+1}), \nabla f(x^k) >= 0$ pour tout k. En déduire que la suite $f(x^k)$ est une suite décroissante et que $lim_{k \longrightarrow \infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0$.

6. On suppose de plus que ∇f est lipschitzienne, montrer que $\|\nabla f(x^k)\| \longrightarrow 0$ et conclure.

Exercice 6

1. Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ une fonction C^1. Montrer que, localement, la direction opposée à celle du gradient est la meilleure direction de descente.

2. Cette direction n'est pas toujours la meilleure globalement : Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ telle que $\Phi(x) = x^T A x$ avec

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \quad , \quad a >> b$$

   Représenter les lignes de niveaux de Φ. Que pouvez-vous dire de la direction opposée à celle du gradient ? Proposez un changement de variable permettant permettant d'utiliser l'algorithme de descente de gradient de manière plus efficace.