TD 8
Optimisation

Exercice 1 – Fontions quadratiques. Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, $b \in E$ et u un endomorphisme de E symétrique défini positif. Montrer que l'application

$$f\colon \begin{cases} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}\langle u(x), x\rangle - \langle b, x\rangle \end{cases}$$

admet un unique point minimum sur E? Calculer ce point minimum.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de sa norme euclidienne $\|M\|_2 = Tr(M^T M)$. Montrer que $SO_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $SL_n(\mathbb{R})$ de norme minimale.

Exercice 3 – Directions principales d'une quadrique. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|$. Étudier les extremums de $f(x) = \|x\|^2$ sur la quadrique d'équation $Q(x) = 1$, où Q est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4 Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $\mathbb{B}$ une base orthonormée de E.

a) Montrer que l'application $f\colon (v_1, ..., v_n) \in E^n \mapsto \det_{\mathbb{B}}(v_1, ..., v_n)$ atteint son maximum sur l'ensemble $X = \{(v_1, ..., v_n) \in E^n,\ |v_i| = 1\}$ et que le maximum est strictement positif.

b) Démontrer que si le maximum est atteint en $(v_1, ..., v_n)$ alors les $(v_1, ..., v_n)$ forment une base orthonormée de E.

c) En déduire l'inégalité d'Hadamard, pour tout $(v_1, ..., v_n) \in E^n$, on a $|\det_{\mathbb{B}}(v_1, ..., v_n)| \leqslant |v_1| \cdots |v_n|$. Quand a-t-on l'égalité?

Exercice 5 – Problème de Fermat. Soit A, B, C trois points non alignés du plan.

a) Montrer que l'application $f : M \mapsto MA+MB+MC$ est strictement convexe, où $MA := \left\|\overrightarrow{MA}\right\|$ désigne la distance euclidienne des points M et A.

b) Montrer que l'application f admet un unique minimum.

c) Soit M_0 le point où ce minimum est atteint. A-t-on $d_{M_0} f$?

Exercice 6 On munit $\mathbb{R}^3$ de sa norme euclidienne.
Soit $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 + xy = 0,\ x^2 + y^2 = 1\}$.

a) Quelle est la nature de l'ensemble A?

b) Déterminer les points de A les plus proches de $(0, 0, 0)$.

Exercice 7

a) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la surface S d'équation $x^4 + y^4 + z^4 = 1$. Déterminer les points de S les plus éloignés de l'origine $(0, 0, 0)$ (pour la distance euclidienne).

b) Plus généralement, soient $q \geqslant p > 1$. Donner la valeur maximale de $\sum_i^n |x_i|^p$ sous la contrainte $\sum_i^n |x_i|^q = 1$.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant la propriété suivante

$$\exists \alpha > 0 \quad | \quad \forall x, y \quad < \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y > \geqslant \alpha \|x - y\|^2$$

a) A l'aide d'une formule intégrale de Taylor avec reste intégral, démontrer que pour tout x,y on a $f(y) - f(x) - < \nabla f(x), y - x > \geqslant \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2$.

b) En déduire que f est coercive.

c) Que peut-on en conclure sur le problème de minimisation de f ?

d) Pour x^0 donné, on définit la suite x^k par $x^{k+1} = x^k - \rho_k \nabla f(x^k)$ où ρ_k (que l'on ne cherchera pas à déterminer) est tel que

$$f(x^k - \rho \nabla f(x^k)) = min_{\rho \in \mathbb{R}^+} f(x^k - \rho \nabla f(x^k))$$

Vérifier que si a est une solution du problème de minimisation, $\alpha \|x^k - a\| \leqslant \|\nabla f(x^k)\|$.

e) Montrer que $< \nabla f(x^{k+1}), \nabla f(x^k) >= 0$ pour tout k. En déduire que la suite $f(x^k)$ est une suite décroissante et que $lim_{k \longrightarrow \infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0$.

f) On suppose de plus que ∇f est lipschitzienne, montrer que $\|\nabla f(x^k)\| \longrightarrow 0$ et conclure.

Exercice 9

a) Soit $f \colon \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$. Montrer que, localement, la direction opposée à celle du gradient est la meilleure direction de descente.

b) Cette direction n'est pas toujours la meilleure globalement : Soit $\Phi \colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ telle que $\Phi(x) = x^T A x$ avec

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}, \quad a >> b$$

Représenter les lignes de niveaux de Φ. Que pouvez-vous dire de la direction opposée à celle du gradient? Proposez un changement de variable permettant d'utiliser l'algorithme de descente de gradient de manière plus efficace.