Mariano Rodríguez, Frédéric Pascal

TD 4
Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites

Exercice 1

a) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 injective sur U telle que $\mathrm{d}f_x$ soit inversible pour tout $x \in U$. Montrer que $f(U)$ est ouvert et que f est un C^1 difféomorphisme de U sur $f(U)$.

b) Soit $U = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2, r > 0\}$ et soit $V = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, montrer que $f : U \to V$ définie par $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ n'est pas un changement global de coordonnées.

c) Soit $\Phi : \mathbb{R}\times]0, +\infty[\to \Omega \subset \mathbb{R}^2$ telle que $\Phi(x, y) = (e^x + \log y, e^x + 2 \log y)$. Déterminer Ω pour que Φ définisse un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ sur Ω

d) Soit

$$f : x \to \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{\pi}{x} & \texttt{si } x \neq 0 \\ 0 & \texttt{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée non nulle en 0 mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0.

e) Montrer qu'il existe une fonction différentiable G définie sur un voisinage V de I_n dans $M_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $A \in V$, on a $G(A)^2 = A$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ et S_n^{++} celui des matrices symétriques définies positives.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe un voisinage V de I_n tel que pour tout $B \in V$ il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^k = B$.

b) Montrer qu'il existe un voisinage V de I_n tel que pour tout $B \in V$ il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\exp A = B$.

c) Montrer $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ il existe une unique matrice symétrique positive B telle que $A = B^2$. Montrer que B est définie positive. On note $B = \sqrt{A}$.

d) Montrer que l'application

$$\begin{cases} S_n^{++}(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ A \to \sqrt{A} \end{cases}$$

est de classe C^∞.

Exercice 3 Soient $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ une racine simple de P_0. Montrer qu'il existe une fonction "racine" de classe C^∞ dans un voisinage de P_0. De façon précise montrer qu'il existe un voisinage V de P_0 dans $\mathbb{R}_n[X]$ un voisinage W de x_0 et une fonction $rac : V \to W$ telle que $rac(P)$ soit une racine de P pour tout $P \in V$.