Exo 1 :

$\phi : U \times F \to F$ est C^1 sur $U \times F$ $\quad \phi(a,b) = 0$ par hypothèse

$(x,y) \mapsto y - f(x)$

$d_x \phi(x,y) = -df(x)$ en effet c'est la différentielle de $x \to y - f(x)$

$d_x \phi(a,b) = -df(a)$ c'est un isomorphisme par hypothèse

TFI $\Rightarrow \exists V \ni a,\ W \ni f(a)$ et $\exists \varphi : W \to V$ C^1 /

$\forall x \in V, \forall y \in W \quad x = \varphi(y) \Leftrightarrow \phi(\varphi(y), y) = 0$

$\Leftrightarrow y - f(\varphi(y)) = 0$

$\Leftrightarrow \varphi(y) = f^{-1}(y)$ $\cancel{\forall y}$ $\in W$

f est donc 1 C^1-difféomorphisme de V sur W (TIL)

Exo 2 :

a) $\Phi : U \subset E \times F \to E \times G$. $\quad \Phi$ est de classe C^1 par hypothèse sur f

$(x,y) \longmapsto (x, f(x,y))$

$d\Phi(x,y)(h,k) = (h, d_x f(x,y)h + d_y f(x,y)k)$

b) $d\Phi(a,b)(h,k) = (h, d_x f(a,b)h + d_y f(a,b)k)$.

$d\Phi(a,b)(h,k) = (u,v) \Leftrightarrow h = u$ et $k = +(d_y f(a,b))^{-1}(-d_x f(a,b)u + v)$

De plus $(d\Phi(a,b))^{-1} : E \times G \to E \times F$

$(u,v) \longmapsto (u, +(d_y f(a,b))^{-1}(-d_x f(a,b)u + v))$ est continu.

$\Rightarrow d\Phi(a,b)$ est donc un isomorphisme

c) $D\Phi(a,b) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} m & p \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ p \end{array} & \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ d_x f(a,b) & d_y f(a,b) \end{pmatrix} \end{array}$ $\quad |D\Phi(a,b)| \neq 0$ car $|d_y f(a,b)| \neq 0$.

d) TIL $\Rightarrow \exists V \ni (a,b) \subset E \times F$, $\exists W \ni (a, f(a,b)) = (a,0) \subset E \times G$ /

Φ soit 1 C^1 difféomorphisme de V sur $W = W_1 \times W_2$

$(x,y) \in V$ et $(x,z) = \Phi(x,y) \Leftrightarrow (x,z) \in W$ et $(x,y) = \Phi^{-1}(x,z)$

Si on écrit $\Phi^{-1}(x,z) = (x, g(x,z))$ et si on prend $z = 0$

On a $(x,y) \in V$ et $0 = f(x,y) \Leftrightarrow x \in W_1$ et $y = g(x,0) = \varphi(x)$ C^1

Exo 3

a) $f(x) = f(y) \Rightarrow 0 \geq k\|x-y\|$ soit $x = y \Rightarrow$ injectif

b) Soit (y_n) une suite de $f(\mathbb{R}^n)$ convergent vers y

Par definition $y_n = f(x_n)$.

y_n est 1 suite de Cauchy, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \begin{array}{l}\forall p > N \\ \forall q > N\end{array}$ $\|y_p - y_q\| \leq \varepsilon k$

Par suite $k\|x_p - x_q\| \leq \|f(x_p) - f(x_q)\|$

implique que $\|x_p - x_q\| \leq \varepsilon$

(x_n) est donc une suite de Cauchy $\Rightarrow$ CV ds $\mathbb{R}^n$ vers x

et par continuité $f(x_n)$ converge vers $f(x) = y$. $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé

c) $f(x + th) - f(x) = df(x)\, th + \|th\|\, \varepsilon(th)$ $\quad t \in \mathbb{R}$

Or $\|f(x+th) - f(x)\| \geq k\|th\| = k|t|\,\|h\|$

d'où $\|df(x)\, th + \|th\|\, \varepsilon(th)\| \geq k|t|\,\|h\|$

$\|df(x) h + \|h\|\, \varepsilon(th)\| \geq k\|h\|$

$t \to 0$ $\quad \|df(x) h\| \geq k\|h\|$.

Si $df(x) h = 0$ alors $h = 0 \Rightarrow$ injectif + linéaire $\Rightarrow$ inversible

d) Théorème d'inversion globale

f est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $f(\mathbb{R}^n)$.

~~Or~~ $f(\mathbb{R}^n)$ est 1 ouvert or $f(\mathbb{R}^n)$ est aussi fermé.

d'où $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

e) soient $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = f(x_1, y_1)$ et $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = f(x_2, y_2)$

$\|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\|_1 = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leq |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| + |\sin(\frac{y_1}{2}) - \sin(\frac{y_2}{2})|$ $\quad$ or sin 1-lipschitzienne

$+ |\bar{y}_1 - \bar{y}_2| + |\sin(\frac{x_1}{2}) - \sin(\frac{x_2}{2})|$

$\leq \|(\bar{x}_1, \bar{y}_1) - (\bar{x}_2, \bar{y}_2)\|_1 + \frac{1}{2}|y_1 - y_2| + \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$

d'où $\frac{1}{2}|x_1 - x_2| + \frac{1}{2}|y_1 - y_2| \leq \|(\bar{x}_1, \bar{y}_1) - (\bar{x}_2, \bar{y}_2)\|_1$

Exo 4

1) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0\}$.

$$df(x,y,z)(h,k,l) = \left(h+k,\ \frac{k}{x} - \frac{y}{x^2}h,\ \frac{l}{x} - \frac{z}{x^2}h\right)$$

$$df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 \\ -\frac{z}{x^2} & 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \qquad \det(df(x,y,z)) = \frac{1}{x^2} + \frac{y}{x^3} = \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{y}{x}\right)$$

$(*)$

2). D'après $df(x,y,z)$ est inversible pour tout $(x,y,z) \in V$

- $f(x_1,y_1,z_1) = f(x_2,y_2,z_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+y_1 = x_2+y_2 \\ y_1/x_1 = y_2/x_2 \\ z_1/x_1 = z_2/x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1+y_1 = \frac{x_2}{x_1}(x_1+y_1) \Rightarrow x_2 = x_1 \quad \text{car } x_1+y_1 \neq 0$$

Exo 5

a) $\|f(x)-x-f(y)+y\| \leq k\|x-y\|$ $\qquad k<1$

si $f(x)=f(y)$ alors $\|x-y\| \leq k\|x-y\| < \|x-y\|$ si $x \neq y$. $\Rightarrow$ contradiction

b) $\phi(x+th)-\phi(x) = d\phi(x)\,th + \|th\|\,\varepsilon(th)$

d'où $\|d\phi(x)\,th + \|th\|\,\varepsilon(th)\| \leq k\|th\|$ car ϕ est k-lipschitzienne

d'où $\|d\phi(x)h + \|h\|\,\varepsilon(th)\| \leq k\|h\|$ $\quad t \to 0$ $\quad t \in \mathbb{R}$.

~~Soit~~ $\|d\phi(x)h\| \leq k\|h\|$

Or $\|d\phi(x)\| \leq \sup_{h} \frac{\|d\phi(x)h\|}{\|h\|} \leq k$.

c) $d\phi(x) = df(x) - id.$ $\Rightarrow df(x) = id + d\phi(x)$ et $\|d\phi(x)\| \leq k < 1 \Rightarrow df(x)$ inversible

avec $df(x)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-d\phi(x))^{n}$.

d) $\|f(x)-x-f(0)+0\| \leq k\|x-0\|$

$\|f(x)-x-f(0)\| \leq k\|x\|$

$\big|\,\|f(x)-f(0)\| - \|x\|\,\big| \leq k\|x\| \Rightarrow -k\|x\| \leq \|f(x)-f(0)\| - \|x\|$

$\Rightarrow (1-k)\|x\| \leq \|f(x)\| + \|f(0)\|$

e) h est continue et $h(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$ car $\big|\,\|f(x)\| - \|y\|\,\big| \leq \|f(x)-y\|$

d'où $(1-k)\|x\| - \|f(0)\| - \|y\| \leq \|f(x)-y\|$

Par compacité h est minorée et atteint son minimum.

Soit $z \mid h(z) = m$.

f) CN de minimalité : $dh(z) = 0$ car h est différentiable sur H.

g) $2\langle f(z)-y, df(z)h\rangle = 0 \quad \forall h$. Or $df(z)$ est inversible

donc $\langle f(z)-y, h\rangle = 0 \quad \forall h$.

En particulier pour $h = f(z)-y$ d'où $f(z) = y \Rightarrow f$ surjective.

h) f est bijective.

i) ~~Rmq~~: si f ~~était~~ C^1, f ~~serait~~ 1 C^1 difféomorphisme de H ds H.