Mariano Rodríguez, Frédéric Pascal

TD 7
Sous-variétés

Exercice 1 Soit G un sous-ensemble de $\mathbb{R}^k$. On suppose que G est muni d'une structure de groupe dont on note e l'élément neutre et $\times$ la loi. On dira que G est un **groupe de Lie** lorsque G est en plus une sous-variété de $\mathbb{R}^k$ et que les applications :

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \to & G \\ (g,h) & \mapsto & g \times h \end{array} \qquad \begin{array}{c} G \to G \\ g \mapsto g^{-1} \end{array}$$

sont de classe C^1 au sens où ce sont les restrictions à $G \times G$ (resp G) d'applications de classe C^1 définies sur $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ (resp $\mathbb{R}^k$). On appelle alors algèbre de Lie l'espace T_eG. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-variétés de $M_n(\mathbb{R})$ puis des groupes de Lie en prenant pour loi la multiplication matricielle. Préciser les algèbres de Lie.

a) $GL_n(\mathbb{R})$.

b) $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / det(M) = 1\}$.

c) $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / M^T M = I_n\}$.

Exercice 2 Montrer que l'ensemble $N = \{M \in M_2(\mathbb{R}), \quad M \neq 0, \quad M^2 = 0\}$ est une sous-variété. Donner sa dimension. *Remarque: On pourra commencer par chercher une caractérisation de N à l'aide de la trace et du déterminant*

Exercice 3 Soient $0 \leqslant r \leqslant n$ des entier (avec $n \geqslant 2$).

a) Montrer qu'il existe un voisinage U de 0 dans $M_n(\mathbb{R})$ tel que si

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in U$$

alors la matrice

$$\begin{pmatrix} I_r + A & C \\ B & D \end{pmatrix}$$

est de rang r *ssi* $D = B(I_r + A)^{-1}C$.

b) Soit $V_r \subset M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de rang r. Montrer que c'est une sous-variété et donner sa dimension.

c) Montrer que l'ensemble des matrices symétriques de rang r forment une sous-variété de l'espace des matrices symétriques. Donner sa dimension.

Exercice 4 Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. $\mathcal{C} = \{\gamma(t) / t \in I\}$ définit une courbe paramétrée du plan. $\mathcal{C}$ est-elle nécessairement une sous-variété de $\mathbb{R}^2$? Et si l'on suppose de plus que γ est injective ?