Mariano Rodríguez, Frédéric Pascal

TD 3
Différentiabilité

Exercice 1

a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application donnée par

$$f(x,y) = \left| \begin{array}{rl} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{array} \right.$$

Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent mais ne sont pas égales.

Exercice 2

a) Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, $f : U \to F$ une application différentiable, $a \in U$ et $v \in E$. Montrer que l'application

$$f_{a,v} : t \longmapsto f(a+tv)$$

est définie sur un intervalle ouvert contenant 0 et dérivable en tout point où elle est définie. Calculer la dérivée de $f_{a,v}$ en $t = 0$. On suppose que f est k-fois différentiable en a. Calculer les dérivés successives de ${f_{a,v}}^{(k)}(0)$.

b) Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application deux fois différentiable. Montrer que l'application $x \mapsto \mathrm{d}f_x(x)$ est différentiable et calculer sa différentielle.

c) Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, $f : U \to F$ une application de classe C^∞, $a \in U$ et $v \in E$. Montrer que l'application $v \mapsto \mathrm{d}^k f(a)(v, \ldots, v)$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 3 On se place dans le cas d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et on fixe $a \in U$. Dans la suite, lorsque f est suffisamment régulière, on adoptera la notation simplificatrice suivante :

$$D^k f(a)(h)^k = D^k f(a)(h, h, ..., h)$$

a) Récrire explicitement la précédente expression en utilisant les dérivées partielles k^e de f.

b) On suppose pour cette question que f est de classe C^{k+1} sur U. Soit $h \in \mathbb{R}^n$ tel que le segment $[a, a+h]$ soit inclus dans U. Montrer alors la formule de Taylor avec reste intégral en appliquant la formule correspondante du cas réel à une fonction bien choisie.

$$f(a+h) - f(a) - Df(a)(h) - ... - \frac{1}{k!}D^k f(a)(h)^k = \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1} f(a+th)(h)^{k+1} dt$$

c) En supposant f de classe C^k sur U et $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $[a, a+h]$ soit inclus dans U, montrer qu'il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$f(a+h) - f(a) - Df(a)(h) - ... - \frac{1}{(k-1)!}D^{k-1}f(a)(h)^{k-1} = \frac{1}{k!}D^k f(a+\theta h)(h)^k$$

Démontrer de même la formule de Taylor-Young à l'ordre k pour une fonction de n variables.

d) Expliciter la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction de trois variables puis celui à l'ordre 3 d'une fonction de deux variables.

Exercice 4 Soient U un ouvert convexe d'un espace vectoriel normé E et $f : U \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est convexe si pour tous $x, y \in U$ et tout $t \in [0,1]$, on a

$$f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)$$

ie si le graphe de f est sous ses cordes.

a) On suppose que f est différentiable sur U. Montrer que f est convexe si et seulement si

$$f(y) - f(x) \geqslant \mathrm{d}f(x)(y-x)$$

pour tous $x, y \in U$ (*ie* si le graphe est au-dessus de ses tangentes).

b) On suppose que f est deux fois différentiable sur U. Montrer que f est convexe si et seulement si $\mathrm{d}^2 f(x)$ est positive (en tant que forme quadratique) pour tout $x \in U$.

Exercice 5

a) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. Montrer qu'il existe des fonctions $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x)$$

On souhaite remplacer $\mathbb{R}^n$ par un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, donner des hypothèses sur U pour lesquelles le résultat est toujours valable;

b) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que $f(0) = 0$ et $\mathrm{d}f(0) = 0$. Montrer qu'il existe des fonctions $h_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ telles que $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \sum_{i,j} x_i x_j h_{i,j}(x)$$

c) Montrer que $I = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \quad f(0) = 0\}$ est un idéal maximal de $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ de type fini, principal pour $n = 1$.

Exercice 6 – Application : dérivations de $C^\infty(\mathbb{R})$. Soit $C^\infty(\mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞. On appelle dérivation de $C^\infty(\mathbb{R})$ tout endomorphisme linéaire δ de $C^\infty(\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall (f,g) \in C^\infty(\mathbb{R}),\ \delta(fg) = f\delta(g) + g\delta(f)$$

a) Soit δ une dérivation. Montrer que δ est nulle sur les fonctions constantes.

b) Montrer que si $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ et s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x_0) = g'(x_0)$ alors $\delta(f)(x_0) = \delta(g)(x_0)$.

c) En conclure qu'il existe $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\delta :\ f \mapsto uf'$.

Exercice 7 Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$. On va montrer qu'il existe une fonction f de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ dont l'ensemble des zéros est exactement F. On supposera dans la suite que $F \neq \mathbb{R}^n$.

a) Donner l'exemple d'une fonction de classe C^∞ strictement positive à l'intérieur de la boule unité et nulle partout en dehors.

b) Justifier l'existence d'une suite de boules ouvertes $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que $F = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ ainsi que d'une suite d'applications $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que chaque ϕ_i s'annule uniquement sur $\mathbb{R}^n \setminus B_i$.

c) Déterminer alors une fonction f satisfaisant au problème.