Feuille 0.2

Exercice 1 – Ensembles compacts dans les espaces métriques. Soit (E, d) un espace métrique.

a) Soit $A \subset E$ un sous-ensemble de E. Montrer que A vérifie la propriété de Bolzano Weiestrass (*ie* toute suite dans A a au moins une valeur d'adhérence dans A) *ssi* il vérifie la propriété de Borel Lebesgue, *ie* si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de E telle que $\cup_i U_i \cap A = A$ alors il existe $i_1, \cdots i_N \in I$ tels que $\cup_{k=1}^N U_{i_k} \cap A = A$. Dans ce cas on dit que l'ensemble A est compact.

b) Montrer que toute suite d'un compact A ayant une seule valeur d'adhérence converge.

c) Montrer qu'un sous ensemble A compact de E est fermé et borné. On notera que dans $E = \mathbb{R}^m$ où $(a_n)_n$ converge vers a si et seulement si les composantes $(a_n^i)_n$ convergent dans $\mathbb{R}$ vers les composantes a^i, les fermés bornés sont des compacts.

Exercice 2 – Fonctions définies sur un compact. Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, et soit $f : E \longrightarrow E'$.
Définitions :

- On dit que f est un homéomorphisme de E sur E' si f est inversible continue et f^{-1} est également continue.
- On dit que f est ouverte si l'image de tout ouvert de E par f est un ouvert de E'.
- On dit que $f : E \to E'$ est uniformément continue sur E si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $d(x, y) \leqslant \eta$ entraîne $d'(f(x), f(y)) \leqslant \epsilon$ pour tout x et y.

a) Montrer que si f est continue sur K compact de E alors $f(K)$ est compact et f est uniformément continue sur K. *Remarque:* En particulier une application numérique (à valeur dans $\mathbb{R}$) définie sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

b) Montrer que si f est bijective et continue sur un compact K alors f est une application ouverte de K sur $f(K)$, et donc un homéomorphisme de K sur $f(K)$.

Exercice 3 – Espace vectoriel normé. Soit $(E, \|.\|)$ un evn défini sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E est un espace métrique pour la distance associée à la norme.

a) Montrer que l'application qui à $x \in E$ associe $\|x\|$ est continue sur E.

b) Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ fermé et non bornée. Montrer que si $f : A \to \mathbb{R}$ est continue et coercive i.e. $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors f est minorée et atteint sa borne inférieure sur A.

c) Montrer que E est de dimension finie *ssi* sa boule unité est compacte (théorème de Riesz).

Exercice 4 – Espace de Banach. Un evn complet est appelé espace de Banach.

a) Soit $(a_n)_n$ une suite de E espace de Banach, dont la série est absolument convergente. Montrer que cette série converge dans E et que l'on $\| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n\|$.

b) Soient E un espace de Banach et A un ensemble quelconque non vide. Montre que $\mathcal{B} = \{f : A \to E \,/\, f \text{ bornée}\}$ muni de la norme sup (norme de la convergence uniforme) est un espace de Banach.

c) Soient E un espace de Banach et A un ensemble quelconque non vide. Montre que $\mathcal{C}_b = \{f : A \to E \,/\, f \text{ bornée et continue}\}$ est un sous espace de Banach dans $\mathcal{B}$. On notera que si A est compact, il coincide avec $\mathcal{C}(A, E) = \{f : A \to E \,/\, f \text{ continue}\}$.

d) Montrer que $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$, muni de la norme $\int_0^1 [f(t)|dt$ n'est pas un espace de Banach en prenant par exemple $f_n(x) = 0$ sur $[0, \frac{1}{2}]$, $f_n(x) = 1$ sur $[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$ et linéaire sur $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$.

Exercice 5 – Fonctions linéaires continues dans les evn. Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux evn.

a) Soit $f : E \to F$ linéaire. Montrer les assertions suivantes sont équivalentes : i) f est continue en un point de E, ii) f est continue sur E, iii) f est bornée sur toute partie bornée de E, iv) il existe une constante $M > 0$ telle que $\|f(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E$ pour tout x dans E.

b) Montrer que si f est une forme linéaire non nulle alors f est continue si et seulement si $f^{-1}(0)$ est fermé.

c) Montrer que si F est un espace de Banach, l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F est un espace de Banach pour la norme subordonnée.
Rappel : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, sa norme subordonnée est

$$|f| = \sup\{|f(x)|_F \quad | \quad x \in S_E(0,1)\} = \sup\{\frac{|f(x)|_F}{|x|_E} \quad | \quad x \in E - \{0\}\}$$

d) Soit $p : E \to \mathbb{R}^+$ une semi-norme vérifiant donc $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$; $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ et $p(0) = 0$. Montrer que p est continue sur $(E, \|.\|)$ si et seulement si il existe $M > 0$ telle que pour tout x de E,

$$p(x) \leqslant M\|x\|.$$

En déduire que toute semi-norme p sur $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne est continue et par suite que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes et que toutes les applications linéaires définies sur $\mathbb{R}^n$ et à valeur dans F sont continues.

e) Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni de 2 normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$. Montrer que les boules unités pour ces 2 normes sont homéomorphes (on pourra utiliser une fonction qui à x associe $\lambda(x)x$ avec $\lambda(x) \geqslant 0$).

f) En déduire en particulier que dans $\mathbb{R}^2$ le disque unité est le carré unité sont homéomorphes et définir l'application homéomorphe.