Mariano Rodríguez, Frédéric Pascal

Feuille 0.3

Exercice 1 – Espace de Banach. Un evn complet est appelé espace de Banach.

a) Soit $(a_n)_n$ une suite de E espace de Banach, dont la série est absolument convergente. Montrer que cette série converge dans E et que l'on $\| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n\|$.

b) Soient E un espace de Banach et A un ensemble quelconque non vide. Montre que $\mathcal{B} = \{f : A \to E \,/\, f \text{ bornée}\}$ muni de la norme sup (norme de la convergence uniforme) est un espace de Banach.

c) Soient E un espace de Banach et A un ensemble quelconque non vide. Montre que $\mathcal{C}_b = \{f : A \to E \,/\, f \text{ bornée et continue}\}$ est un sous espace de Banach dans $\mathcal{B}$. On notera que si A est compact, il coincide avec $\mathcal{C}(A, E) = \{f : A \to E \,/\, f \text{ continue}\}$.

d) Montrer que $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$, muni de la norme $\int_0^1 [f(t)|dt$ n'est pas un espace de Banach en prenant par exemple $f_n(x) = 0$ sur $[0, \frac{1}{2}]$, $f_n(x) = 1$ sur $[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$ et linéaire sur $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$.

Exercice 2 – Fonctions linéaires continues dans les evn. Soients $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux evn.

a) Soit $f : E \to F$ linéaire. Montrer les assertions suivantes sont équivalentes : i) f est continue en un point de E, ii) f est continue sur E, iii) f est bornée sur toute partie bornée de E, iv) il existe une constante $M > 0$ telle que $\|f(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E$ pour tout x dans E.

b) Montrer que si f est une forme linéaire non nulle alors f est continue si et seulement si $f^{-1}(0)$ est fermé.

c) Montrer que si F est un espace de Banach, l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F est un espace de Banach pour la norme subordonnée.
Rappel : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, sa norme subordonnée est

$$|f| = \sup\{|f(x)|_F \quad | \quad x \in S_E(0, 1)\} = \sup\{\frac{|f(x)|_F}{|x|_E} \quad | \quad x \in E - \{0\}\}$$

d) Soit $p : E \to \mathbb{R}^+$ une semi-norme vérifiant donc $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$; $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ et $p(0) = 0$. Montrer que p est continue sur $(E, \|.\|)$ si et seulement si il existe $M > 0$ telle que pour tout x de E,

$$p(x) \leqslant M\|x\|.$$

En déduire que toute semi-norme p sur $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne est continue et par suite que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes et que toutes les applications linéaires définies sur $\mathbb{R}^n$ et à valeur dans F sont continues.

e) Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni de 2 normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$. Montrer que les boules unités pour ces 2 normes sont homéomorphes (on pourra utiliser une fonction qui à x associe $\lambda(x)x$ avec $\lambda(x) \geqslant 0$).

f) En déduire en particulier que dans $\mathbb{R}^2$ le disque unité est le carré unité sont homéomorphes et définir l'application homéomorphe.

Exercice 3 – Caractérisation des espaces de Banach. Soient $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $0 < k < 1$

a) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes : i) E est un espace de Banach, ii) toute série absolument convergente est convergente, iii) pour toute suite $(a_n)_n$ de E vérifiant $\|a_n\| \leqslant k^n$, la série a_n converge.

Exercice 4 – Isomorphisme. Soient $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espaces de Banach.

a) Soit $u \in \mathcal{L}(E, E)$ telle que $\|u\| < 1$. Montrer que $Id - u$ est inversible.

b) On dit que f est un isomorphisme, si f est linéaire, continue, bijective et si la bijection réciproque est continue. Montrer que l'ensemble $Isom(E, F)$ formé des isomorphisme de E sur F est un ouvert dans $\mathcal{L}(E, F)$.

c) Montrer que l'application $u \to u^{-1}$ de $Isom(E, F)$ dans $Isom(F, E)$ est continue.