Mariano Rodríguez, Frédéric Pascal

Théorèmes de point fixe

Exercice 1 – Une généralisation du point fixe. Soit (E, d) un espace métrique complet non vide et $\phi : E \to E$ uniformément continue. Pour $q \geqslant 1$ entier, on note $\phi^q = \phi \circ \cdots \circ \phi$, q fois. On suppose qu'il existe $p \geqslant 1$ et $k \in]0, 1[$ tels que pour tout x, y de E, on ait

$$\min_{1 \leqslant q \leqslant p} d(\phi^q(x), \phi^q(y)) \leqslant k d(x, y)$$

a) Soit $a = \inf_{x \in E} d(x, \phi(x))$. Montrer par l'absurde que $a = 0$.

b) Pour $t > 0$ suffisamment petit, on définit le module de continuité de ϕ par

$$\omega^1(t) = \sup_{x,y \in E, d(x,y) \leqslant t} d(\phi(x), \phi(y))$$

Montrer que $\omega^1(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0.

c) Pour $n > 1$, montrer que ϕ^n est uniformément continue. On note $\omega^n(t)$ le module de continuité de ϕ^n.

d) Pour $\alpha \in \mathbb{R}^{+\star}$, on pose $A_\alpha = \{x \in E / d(x, \phi(x)) \leqslant \alpha\}$. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ entier, $A_{1/n}$ est une suite décroissante de parties fermées non vides de E.

e) Soient x, y de E et $q \in [1, p]$ tels que

$$d(\phi^q(x), \phi^q(y)) \leqslant k d(x, y)$$

Montrer en posant $\phi^0(x) = x$ que

$$d(x, y) \leqslant \sum_{i=0}^{q-1} d(\phi^i(x), \phi^{i+1}(x)) + d(\phi^q(x), \phi^q(y)) + \sum_{i=0}^{q-1} d(\phi^i(y), \phi^{i+1}(y))$$

f) On pose $\omega^0(t) = t$, en déduire que le diamètre de $A_{1/n}$ vérifie

$$\delta(A_{1/n}) \leqslant \frac{2}{1-k} \sum_{i=0}^{p-1} \omega^i(1/n)\,.$$

g) Que peut-on conclure sur ϕ ?

Exercice 2 – Théorème de Picard, exemple et contre-exemple.

a) Montrer que le théorème de Picard n'est plus vrai si on ne suppose pas X complet.

b) Montrer que le théorème de Picard n'est plus vrai si on ne suppose pas l'application contractante (même avec l'inégalité $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$).

Exercice 3 – Version faible du théorème de Picard et applications.

a) Soient (X, d) un espace métrique complet non vide et $f : X \to X$ une application (qu'on ne suppose pas continue). On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in [0, 1[$ tels que $d(f^N(x), f^N(y)) \leqslant \alpha d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$, c'est à dire que f^N est une contraction. Montrer que f a un unique point fixe x_0 et que, pour tout $x \in X$, la suite définie par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers x_0. Quelle est la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Applications. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $I = [a, b]$ un intervalle compact. On considère une fonction $K : I \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et φ une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$.

b) On suppose que $(b - a)\|K\|_\infty < 1$. Montrer qu'il existe une unique application continue $x : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$x(t) = \varphi(t) + \int_a^b K(s, t)x(s)\mathrm{d}\, s\,.$$

c) Montrer qu'il existe une unique fonction $x : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$x(t) = \varphi(t) + \int_a^t K(s, t)x(s)\mathrm{d}\, s\,.$$

Exercice 4 – Une démonstration plus topologique du théorème de Picard.

1. On notera, pour A une partie d'un espace métrique, $\delta(A) = \sup\{d(x, y)\ /\ x, y \in A\}$ le diamètre de A. Démontrer le résultat suivant (théorème dit des fermés emboîtés) :
Un espace métrique (X, d) est complet ssi l'intersection de toute suite décroissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties fermées non vides de X telles que $\lim_{n\to+\infty} \delta(A_n) = 0$ est non vide.

2. Soit (X, d) un espace métrique complet non vide et $f :\ X \to X$ lipschitzienne de rapport $k \in [0, 1[$. Pour $R \in \mathbb{R}^+$, on pose $A_R = \{x \in X\ /\ d(x, f(x)) \leqslant R\}$.

a) Montrer que $f(A_R) \subset A_{kR}$ et en déduire que pour tout $R \in \mathbb{R}^+_*$, A_R est une partie fermée non vide de X.

b) Soient $x, y \in A_R$. Montrer que $d(x, y) \leqslant 2R + d\left(f(x), f(y)\right)$ et en déduire que $\delta(A_R) \leqslant \frac{2R}{1-k}$.

c) Montrer que $A_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_{1/n}$ et en conclure que A_0 est non vide.

Exercice 5 – Suite de points fixes. Soient (X, d) un espace métrique complet et $f_n : X \to X$ une suite de fonctions continues. On suppose que f_n admet un point fixe x_n.

Pour les questions **a**, **b** et **c**, on suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X.

a) On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers x_0). Montrer que x_0 est un point fixe pour f.

b) On suppose que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers x_0). Montrer que x_0 est un point fixe pour f.

c) On suppose que f est contractante. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique point fixe de f.

Pour les questions **d**, **e** et **f**, on suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur X. On suppose aussi qu'il existe $\alpha > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n soit α-lipschiztienne.

d) Montrer que f est α-lipschiztienne. En déduire que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0 alors x_0 est un point fixe de f.

e) On suppose $\alpha < 1$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique point fixe de f. Montrer qu'on ne peut pas remplacer la condition $\alpha < 1$ par la condition $\alpha_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (où f_n est α_n-lipschitzienne). On pourra considérer l'opérateur $f_n : \ell^2 \to \ell^2$ défini par

$$f_n((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = (0, \ldots, 0, (1 - 1/n)x_n + 1/n, 0, \ldots).$$

f) **Application.** Soient X un compact non vide d'un espace vectoriel normé qu'on suppose étoilé par rapport à l'un de ses points x_0 (c'est le cas par exemple si X est convexe). On suppose que $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|$ pour tous $x, y \in X$. Montrer que f a un point fixe (on pourra introduire une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et les fonctions $f_n(x) = (1-t_n)f(x)+t_n x_0$). Peut-on retirer l'hypothèse de compacité ? (Pensez à une translation sur $\mathbb{R}$).

Exercice 6 – Inversion globale et point fixe.

a) Soit (Y, d) un espace métrique complet et $B = B(y_0, r)$ la boule ouverte de centre y_0 et de rayon r. On considère $f : B \to Y$ une application contractante de rapport $\alpha < 1$. Montrer que si $d(f(y_0), y_0) < (1-\alpha)r$ alors f a un point fixe (on pourra introduire la boule fermé de centre y_0 et de rayon $\varepsilon < r$ avec ε bien choisi qui est alors un espace complet).

Dans les questions qui suivent, on considère X un espace de Banach, U un ouvert de X et $F : U \to X$ une application contractante (de constante α). Pour $x \in U$, on pose $f(x) = x - F(x)$.

b) Soient $x \in U$ et $r > 0$ tels que $B(x, r) \subset U$. Montrer que $B(f(x), (1-\alpha)r) \subset f(B(x, r))$ (pour $y \in B(f(x), (1-\alpha)r)$, on pourra introduire la fonction $G : u \mapsto F(u) + y$ et utiliser la question **a**).

c) Montrer que si V est un ouvert de U alors $f(V)$ est ouvert.

d) Montrer que f est un homéomorphisme de U sur $f(U)$.

e) On suppose que $U = X$. Montrer que $f(U) = X$ et que f est un homéomorphisme de X sur lui-même.