Valentin De Bortoli , Frédéric Pascal

Feuille 0.1 - Généralités sur les espaces métriques

Exercice 1 – Topologie dans les espaces métriques. Soit (E, d) un espace métrique.

a) On définit $\mathcal{O} = \{U \subset E \mid \forall x \in U, \exists r > 0 : B(x, r) \subset U\}$. Montrer que $(E, \mathcal{O})$ est un espace topologique.

b) Soit d' une seconde distance sur E équivalente à d, c'est-à-dire qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que pour tout $x, y \in E$, $C_1 d(x, y) \leqslant d'(x, y) \leqslant C_2 d(x, y)$. Montrer que les topologies engendrées par d et d' ont les mêmes ouverts.

c) Soit $d'(x, y) = \min(d(x, y), 1)$, $d''(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. Montrer que d et d' sont des métriques et que les topologies engendrées par d, d' et d'' sont identiques.
Remarque : deux métriques qui engendrent la même topologie sont-elles équivalentes ?

d) Soient a et b deux points distincts de E, montrer qu'il existe deux ouverts contenant respectivement a et b, d'intersection vide, i.e l'espace est séparé.

e) Montrer que A est un ouvert si et seulement si A est une union de boules ouvertes.

f) Soit $x \in E$. On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x. Montrer que $A \subset E$ est un ouvert si et seulement si A est un voisinage de chacun de ses points.

g) On note $\mathring{A}$ (respectivement $\overline{A}$) l'ensemble des points intérieurs (respectivement adhérents) à A. Montrer que

$$(\mathring{A})^c = \overline{A^c}.$$

h) Montrer que $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A ou encore l'intersection de tous les fermés contenant A et que $(\overline{A})^c = (\mathring{\overline{A^c}})$. En déduire que A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.

Exercice 2 – Suites dans les espaces métriques. Soit (E, d) un espace métrique et soit $\mathcal{O}$ l'ensemble de ses ouverts (comme défini dans l'exercice précédent).

a) Soit $(a_n)_n$ une suite de E. Montrer que la convergence de a au sens topologique est équivalente à la convergence au sens métrique.

b) Pour $A \subset E$, montrer que

$$x \in \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (a_n)_n \text{ suite dans } A \ / \ x = \lim_{n\to\infty} a_n \, .$$

c) Montrer que $A \subset E$ est fermé *ssi* pour toute suite $(u_n)_n$ de A, si $(u_n)_n$ admet une limite $l \in E$, alors $l \in A$.

d) On dit que a est une valeur d'adhérence de $(a_n)_n$ lorsqu'il existe une suite extraite de $(a_n)_n$ qui converge vers a. Montrer que c'est équivalent à

$$\forall \epsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant n_0 \quad / \quad d(a_n, a) \leqslant \epsilon$$

e) Soit $(a_n)_n$ une suite de E et soit $a \in E$. Montrer que si a est une valeur d'adhérence (au sens défini dans la question précédente) alors a est dans l'adhérence de $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

f) Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite $(a_n)_n$ de E est égal à $\cap_{N\in\mathbb{N}}\overline{\{a_n \mid n \geqslant N\}}$.

Exercice 3 – Ensembles compacts dans les espaces métriques. Soit (E,d) un espace métrique.

a) Soit $A \subset E$ un sous-ensemble de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- A vérifie la propriété de Bolzano Weiestrass, *ie* toute suite dans A a au moins une valeur d'adhérence dans A,
- A est précompact, *ie* pour tout $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $(x_i)_{i\in\{1,\dots,N\}} \in A^N$, $\bigcup_{i=1}^{N} B(x_i,\epsilon) \supset A$, et A est complet,
- A vérifie la propriété de Borel Lebesgue, *ie* si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de E telle que $\cup_i U_i \cap A = A$ alors il existe $i_1,\cdots i_N \in I$ tels que $\cup_{k=1}^{N} U_{i_k} \cap A = A$.

Remarque : Dans le cas d'espaces topologiques généraux on ne peut plus définir un compact par les deux premiers points. Il est alors défini par la propriété de Borel-Lebesgue. Il faut néanmoins ajouter la propriété A est séparé.

b) Montrer que toute suite d'un compact A ayant une seule valeur d'adhérence converge.

c) Montrer qu'un sous ensemble A compact de E est fermé et borné. On notera que dans $E = \mathbb{R}^m$ où $(a_n)_n$ converge vers a si et seulement si les composantes $(a_n^i)_n$ convergent dans $\mathbb{R}$ vers les composantes a^i, les fermés bornés sont des compacts.
Remarque : Le théorème de Riesz permet d'assurer que la boule unité d'un espace vectoriel normé est compacte si et seulement si l'espace est de dimension finie.

Exercice 4 – Ensembles complets dans les espaces métriques. Soit (E,d) un espace métrique. *Définitions*:

- Une suite $(a_n)_n$ de E est dite de Cauchy si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p,q \geqslant N$, $d(a_p,a_q)o \leqslant \epsilon$.
- Un sous ensemble $A \subset E$ est dit complet si toute suite de Cauchy de A converge dans A.

a) Montrer qu'une suite de E convergente est de Cauchy.

b) Montrer qu'une suite de E ayant deux valeurs d'adhérences distinctes n'est pas de Cauchy.

c) Montrer que si A est compact alors A est complet.

d) Montrer que si A est complet alors A est fermé.

e) Montrer que si E est complet alors $A \subset E$ est complet si et seulement si A est fermé.

f) Montrer que si E est complet, toute intersection dénombrable d'ouverts dense est dense (théorème de Baire).
Remarque : Le théorème de Baire est utilisé en analyse fonctionnelle pour prouver de nombreux théorèmes fondamentaux (théorème de l'application ouverte, théorème de Banach-Steinhaus...). Il permet également d'affirmer l'existence de fonctions continues partout non-dérivables, de fonctions continues dont la série de Fourier ne converge pas... Néanmoins ces preuves ne sont pas constructives.

g) Montrer que $\mathbb{R}[X]$ ne peut pas être un espace complet et ce quelle que soit la norme.

Exercice 5 – Fonctions continues. Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques.

a) Soit a fixé, montrer que $f : E \to \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = d(a, x)$ est continue.

b) Montrer que pour qu'une application f soit continue de E sur F, il faut et il suffit que l'image réciproque de tout ouvert de F soit un ouvert de E.

c) Montrer que f est continue en a si et seulement si l'image par f de toute suite de E convergeant vers a converge vers $f(a)$. En déduire que f est continue si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E.

d) Montrer qu'étant donnés 2 applications f et g continues sur E, le sous ensemble des points où f et g coïncident est fermé et qu'en particulier, si f et g prennent les mêmes valeurs sur un ensemble dense dans E (i.e. dont l'adhérence est égal à E) alors $f = g$.

e) Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications de E sur F qui converge uniformément vers f c'est-à-dire telle que

$$\sup_{x\in E} d'(f_n(x), f(x)) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0\,.$$

Montrer que si les f_n sont continues alors f est continue.

Exercice 6 – Fonctions définies sur un compact. Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, et soit $f : E \longrightarrow E'$.
Définitions :

- On dit que f est un homéomorphisme de E sur E' si f est inversible continue et f^{-1} est également continue.
- On dit que f est ouverte si l'image de tout ouvert de E par f est un ouvert de E'.
- On dit que $f : E \to E'$ est uniformément continue sur E si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $d(x, y) \leqslant \eta$ entraîne $d'(f(x), f(y)) \leqslant \epsilon$ pour tout x et y.

a) Montrer que si f est continue sur K compact de E alors $f(K)$ est compact et f est uniformément continue sur K. *Remarque:* En particulier une application numérique (à valeur dans $\mathbb{R}$) définie sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

b) Montrer que si f est bijective et continue sur un compact K alors f est une application ouverte de K sur $f(K)$, et donc un homéomorphisme de K sur $f(K)$.