

Feuille 0.2 - Espaces de Banach

Exercice 1 – Espace vectoriel normé. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé (e.v.n) défini sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} . E est un espace métrique pour la distance associée à la norme.

- Montrer que l'application qui à $x \in E$ associe $\|x\|$ est continue sur E .
- Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ fermé et non borné. Montrer que si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et coercive i.e. $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors f est minorée et atteint sa borne inférieure sur A .
- Montrer que si E est de dimension finie alors sa boule unité est compacte. *Remarque* : Pourquoi ne précise-t-on pas la norme utilisée ?
- Soit F un sous-espace vectoriel fermé strictement inclus dans E . Soit $1 > r > 0$. Montrer qu'il existe $u \in E$, tel que $\|u\| = 1$ et $d(u, F) > r$ (lemme de Riesz).
- Montrer que E est de dimension finie ssi sa boule unité est compacte (théorème de Riesz).

Exercice 2 – Espace de Banach. Un e.v.n complet est appelé espace de Banach.

- Soit $(a_n)_n$ une suite de E espace de Banach, dont la série est absolument convergente. Montrer que cette série converge dans E et que l'on $\|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n\|$.
- Soient E un espace de Banach et A un ensemble quelconque. Montrer que $\mathcal{B} = \{f : A \rightarrow E / f \text{ bornée}\}$ muni de la norme sup (norme de la convergence uniforme) est un espace de Banach.
- Soient E un espace de Banach et A un espace topologique quelconque non vide. Montre que $\mathcal{C}_b = \{f : A \rightarrow E / f \text{ bornée et continue}\}$ est un sous espace de Banach dans \mathcal{B} . On notera que si A est compact, il coïncide avec $\mathcal{C}(A, E) = \{f : A \rightarrow E / f \text{ continue}\}$.
- Montrer que $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ vers \mathbb{R} , muni de la norme $\int_0^1 |f(t)| dt$ n'est pas un espace de Banach en prenant par exemple $f_n(x) = 0$ sur $[0, \frac{1}{2}]$, $f_n(x) = 1$ sur $[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$ et linéaire sur $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$.

Exercice 3 – Fonctions linéaires continues dans les e.v.n. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n.

- Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire. Montrer les assertions suivantes sont équivalentes : i) f est continue en un point de E , ii) f est continue sur E , iii) f est bornée sur toute partie bornée de E , iv) il existe une constante $M > 0$ telle que $\|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$ pour tout x dans E .
- Montrer que si f est une forme linéaire non nulle alors f est continue si et seulement si $f^{-1}(0)$ est fermé.
- Montrer que si F est un espace de Banach, l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F est un espace de Banach pour la norme subordonnée.
Rappel : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, sa norme subordonnée est

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\|_F \mid x \in S_E(0, 1)\} = \sup\left\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E - \{0\}\right\}$$

- Soit $p : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ une semi-norme. Montrer que p est continue sur $(E, \|\cdot\|)$ si et seulement si il existe $M > 0$ telle que pour tout x de E ,

$$p(x) \leq M\|x\|.$$

En déduire que toute semi-norme p sur \mathbb{R}^n muni de la norme euclidienne est continue et par suite que toutes les normes sur \mathbb{R}^n sont équivalentes et que toutes les applications linéaires définies sur \mathbb{R}^n et à valeur dans F sont continues.

- e) Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni de 2 normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. Montrer que les boules unités pour ces 2 normes sont homéomorphes (on pourra utiliser une fonction qui à x associe $\lambda(x)x$ avec $\lambda(x) \geq 0$).
- f) En déduire en particulier que dans \mathbb{R}^2 le disque unité est le carré unité sont homéomorphes et définir l'application homéomorphe.

Exercice 4 – Caractérisation des espaces de Banach. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $0 < k < 1$

- a) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes : i) E est un espace de Banach, ii) toute série absolument convergente est convergente, iii) pour toute suite $(a_n)_n$ de E vérifiant $\|a_n\| \leq k^n$, la série a_n converge.

Exercice 5 – Isomorphisme. Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces de Banach.

- a) Soit $u \in \mathcal{L}(E, E)$ telle que $\|u\| < 1$. Montrer que $Id - u$ est inversible.
- b) On dit que f est un isomorphisme, si f est linéaire, continue, bijective et si la bijection réciproque est continue. Montrer que l'ensemble $Isom(E, F)$ formé des isomorphisme de E sur F est un ouvert dans $\mathcal{L}(E, F)$.
- c) Montrer que l'application $u \rightarrow u^{-1}$ de $Isom(E, F)$ dans $Isom(F, E)$ est continue.