Feuille 3.2 - Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites

Exercice 1 – Valeurs propres. Soient $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ une valeur propre de multiplicité 1 dans le polynôme caractéristique. Montrer qu'il existe une fonction "valeur propre" de classe C^1 dans un voisinage de A_0. De façon précise, montrer qu'il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, un voisinage W de λ_0 et une fonction $vp : V \longrightarrow W$ tel que $vp(A)$ soit une valeur propre de A pour tout $A \in V$.

Exercice 2 – Locale injectivité et injectivité de la différentielle. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 localement injective (*ie* $\forall a \in \Omega$ il existe un voisinage de a sur lequel f est injective). On pose $X = \{x \in \Omega | \, \mathrm{d}f_x \text{ est injective } \}$. Montrer que X est ouvert dense de Ω.

Exercice 3 – Un difféomorphisme global. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1, on pose

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \to & (x+y, f(x)+g(y)) \end{array}$$

a) Montrer que F est un C^1 difféomorphisme local *ssi* il existe $a \in \mathbb{R}$ tel tel que soit $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) \leqslant a$ et $g'(x) \geqslant a$ soit $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) \geqslant a$ et $g'(x) \leqslant a$ avec à chaque fois l'une des inégalités stricte.

b) On suppose cette condition vérifiée. Montrer que F est un difféomorphisme global sur son image.

Exercice 4 – Système différentiel. Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère le système différentiel

$$S_\mu \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y^2 - \cos x \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -y \sin x - \mu y e^y \end{array} \right.$$

a) Montrer que pour tout $0 \leqslant \mu < 1$ le système S_μ admet un unique point d'équilibre $C(\mu) = (x_c(\mu, y_c(\mu))$ dans la bande $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -\frac{\pi}{2} < x \leqslant 0, y > 0\}$.

b) Montrer que la fonction : $\mu \to C(\mu)$ est de classe C^1 au voisinage de 0 et donner un développement limité à l'ordre 1 de $x_c(\mu)$ et $y_c(\mu)$.

c) On note $A(\mu)$ la matrice du problème linéarisé au point $C(\mu)$. Écrire le développement limité à l'ordre 1 de $A(\mu)$ en 0.

Exercice 5 – Lemme de Morse. Soit $S_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ le sous-espace des matrices symétriques d'ordre n. On rappelle qu'une forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^n$ (identifiée à une matrice de $S_n(\mathbb{R})$ dans une base fixée) est dite de signature (p,q) avec $p,q \in \mathbb{N}$, $p+q \leqslant n$ s'il existe une matrice inversible B telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, (Bx)^T Q(Bx) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q}^2$$

a) Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$ inversible. Soit Φ de $M_n(\mathbb{R})$ dans $S_n(\mathbb{R})$ telle que $\Phi(M) = M^T A_0 M$. Montrer que $\mathrm{d}\Phi(I_n)$ est surjective et préciser son noyau.

b) En considérant la restriction de Φ au sous-espace $A_0^{-1}S_n(\mathbb{R})$ montrer qu'il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application de classe C^1 de V à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$ qui à A associe M telle que $\forall A \in V,\ A = M^T A_0 M$.

c) Soit maintenant U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^3. On suppose que $\mathrm{d}f(0) = 0$ et que la forme quadratique hessienne $\mathrm{d}^2 f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$. Montrer que $f(x) - f(0) = x^T Q(x) x$ où Q est une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $S_n(\mathbb{R})$.

d) Montrer qu'au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ il existe une fonction $x \to M(x)$ de classe C^1 à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$ telle que $Q(x) = M(x)^T Q(0) M(x)$. En déduire l'existence d'un difféomorphisme : $x \to \Psi(x) = (\Psi_1(x), ..., \Psi_n(x))$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\Psi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = \Psi_1(x)^2 + ... + \Psi_p(x)^2 - \Psi_{p+1}(x)^2 - ... - \Psi_n(x)^2$.

Exercice 6 – Isométrie locale. Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que pour tout $x \in \Omega$, $\mathrm{d}f_x \in O_n(\mathbb{R})$. On va montrer que f est en fait une isométrie affine.

a) Justifier qu'il suffit de prouver que $\mathrm{d}f$ est localement constante sur Ω.

b) Si $x_0 \in \Omega$, montrer que pour x et y assez proches de x_0 on a $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

c) Montrer que $\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}f(y)$ et conclure.

Exercice 7 – TFI => TIL.

On suppose que le théorème des fonctions implicites est vrai. Soit f définie sur un ouvert U d'un espace de Banach E et à valeur dans F, espace de Banach telle que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ et telle qu'il existe $a \in U$ tel que $df(a)$ soit un isomorphisme. On note $b = f(a)$.

a) Vérifier que les hypothèses du théorème des fonctions implicites s'appliquent à la fonction $\Phi : U \times F \to F$ définie par $\Phi(x, y) = y - f(x)$.

b) En déduire l'existence de voisinages de a et de b et de f^{-1} définie sur un de ces voisinages.

c) Conclure.

Exercice 8 – TIL=>TFI.

On suppose que le théorème d'inversion locale est vrai. On se donne trois espaces de Banach E, F, G et on considère f définie sur un ouvert U de $E \times F$ à valeur dans G et de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $(a, b) \in U$ vérifiant $f(a, b) = 0$ et tel que la différentielle partielle par rapport à y en (a, b) c'est-à-dire $d_y f(a, b)$ soit un isomorphime.

a) Montrer que la fonction $\Psi : U \to E \times G$ définie par $\Psi(x, y) = (x, f(x, y))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.

b) Vérifier que cette différentielle est inversible en (a, b), montrer en utilisant le théorème d'inversion locale que Ψ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur des espaces que l'on précisera.

c) Reprendre les questions précédentes dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$ et $F = G = \mathbb{R}^p$

d) En remarquant que l'on peut écrire $\Psi^{-1}(x, z)$ sous la forme$(x, g(x, z))$, conclure.