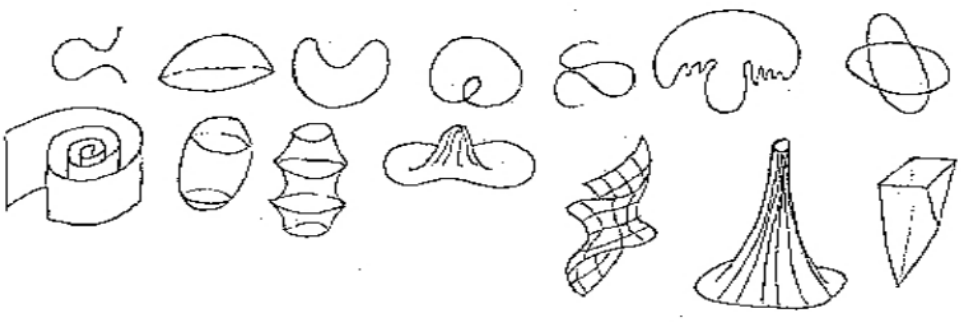
Formation en Mathématiques Commune Cachan/P7 — Année 2017–2018
Calcul différentiel — Valentin De Bortoli, Frédéric Pascal

Feuille 4.1 - Sous-variétés, introduction

Exercice 1 – Quelques exemples (1). Les dessins suivants représentent des parties de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Dites, sans justification rigoureuse, lesquelles sont des sous-variétés C^∞.



Exercice 2 – Quelques exemples (2). Les sous-ensembles V de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ qui suivent sont-ils des sous-variétés ? Et $V \setminus \{0\}$?

a) $V = \mathbb{R}^2$

b) $V = \{(t,0) \in \mathbb{R}^2 / \ t \in [0,1[\}$;

c) $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y = |x|\}$.

d) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2 + y^2 = z^2\}$;

Exercice 3 – Le cas du tore. Montrer que $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + 2y^2 = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $E' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2 + y^2 + 2z^2 = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'un tore dans $\mathbb{R}^3$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ (on pourra considérer le cas du tore symétrique par rapport à l'axe z, d'équation $(R - \sqrt{x^2+y^2})^2 + z^2 = r^2$).

Exercice 4 – Inversibilité et sous-variété.

a) Montrer que l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0 \ \texttt{et} \ 0 \leqslant y < \frac{1}{2}, \ \texttt{ou} \ 0 \leqslant 0 < \frac{1}{2} \ \texttt{et} \ y = 0\}$ n'est pas une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^2$.

b) Donner cependant un exemple d'application C^∞ d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ d'image A.

Exercice 5 – Lignes de niveaux et sous-variétés. Montrer que les lignes de niveau de la fonction suivante sont des sous-variétés $\mathbb{R}^3$:

$$F(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2 + (1 - x^2 - y^2)^2}$$

(Préciser leur dimension)