Feuille 4.2 - Sous-variétés, caractérisations

Exercice 1 – Rang et sous-variété. Soient $0 \leqslant r \leqslant n$ des entier (avec $n \geqslant 2$).

a) Montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété C^∞.

b) Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ de rang $n-1$ est une sous-variété.

c) Montrer qu'il existe un voisinage U de 0 dans $M_n(\mathbb{R})$ tel que si

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in U$$

alors la matrice

$$\begin{pmatrix} I_r + A & C \\ B & D \end{pmatrix}$$

est de rang r *ssi* $D = B(I_r + A)^{-1}C$.

d) Soit $V_r \subset M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de rang r. Montrer que c'est une sous-variété et donner sa dimension.

e) Montrer que l'ensemble des matrices symétriques de rang r forment une sous-variété de l'espace des matrices symétriques. Donner sa dimension.

Exercice 2 – Nilpotence. Montrer que l'ensemble $N = \{M \in M_2(\mathbb{R}), \quad M \neq 0, \quad M^2 = 0\}$ est une sous-variété. Donner sa dimension. *Remarque: On pourra commencer par chercher une caractérisation de N à l'aide de la trace et du déterminant*

Exercice 3 – Courbe paramétrée et sous-variété. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. $\mathcal{C} = \{\gamma(t)/\ t \in I\}$ définit une courbe paramétrée du plan. $\mathcal{C}$ est-elle nécessairement une sous-variété de $\mathbb{R}^2$? Et si l'on suppose de plus que γ est injective ?

Exercice 4 – Une interprétation du gradient.

Soient deux surfaces $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ données par les équations implicites $F(x,y,z) = 0$ et $G(x,y,z) = 0$ où F et G sont deux applications $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On suppose que ces deux surfaces s'intersectent en un point $a \in \mathbb{R}^3$ tel qu'on ait également $\nabla\ F(a) \wedge \nabla\ G(a) \neq 0$. Montrer qu'au voisinage de a, l'intersection des deux surfaces est une sous-variété de dimension 1. Interpréter géométriquement l'espace affine tangent de l'intersection. Examiner le cas où $\nabla\ F(a) \wedge \nabla\ G(a) = 0$ (avec toujours $\nabla\ F(a) \neq 0$ et $\nabla\ G(a) \neq 0$).

Exercice 5 – Une paramétrisation.

On pose M l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ tel qu'il existe $t \in [-1,1]$ et $w \in [0, 2\pi]$ tel que

$$\begin{cases} x &= (1 + \frac{t}{2}\cos\frac{w}{2})\cos w \\ y &= (1 + \frac{t}{2}\cos\frac{w}{2})\sin w \\ z &= \frac{t}{2}\sin\frac{w}{2} \end{cases}$$

Quel est cet ensemble ? Montrer que c'est une sous-variété.

Exercice 6 – Involution.
Montrer que $P = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \quad | \quad M \neq 0, \quad M \neq I_n, \quad M^2 = M\}$ est une sous-variété.

Exercice 7 – Polynôme, racine, sous-variété.
Soit $n \geqslant 1$ un entier. On identifie $\mathbb{R}_n[X]$ à $\mathbb{R}^{n+1}$.

a) Montrer que l'ensemble E des polynômes ayant une unique racine, avec multiplicité n, est une sous-variété C^1, et indiquer sa dimension.

b) Montrer que, si $n \geqslant 2$, l'adhérence de E n'est pas une sous-variété.

Exercice 8 – Groupe de Lie. Soit G un sous-ensemble de $\mathbb{R}^k$. On suppose que G est muni d'une structure de groupe dont on note e l'élément neutre et $\times$ la loi. On dira que G est un **groupe de Lie** lorsque G est en plus une sous-variété de $\mathbb{R}^k$ et que les applications :

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \to & G \\ (g,h) & \mapsto & g \times h \end{array} \qquad \begin{array}{c} G \to G \\ g \mapsto g^{-1} \end{array}$$

sont de classe C^1 au sens où ce sont les restrictions à $G \times G$ (resp G) d'applications de classe C^1 définies sur $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ (resp $\mathbb{R}^k$). On appelle alors algèbre de Lie l'espace T_eG. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-variétés de $M_n(\mathbb{R})$ puis des groupes de Lie en prenant pour loi la multiplication matricielle. Préciser les algèbres de Lie.

a) $GL_n(\mathbb{R})$.

b) $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / det(M) = 1\}$.

c) $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / M^T M = I_n\}$.

Exercice 9 – Sous-variétés de la sphère.
On note S^2 la sphère de $\mathbb{R}^3$ et $F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - \frac{1}{2})^2 + x_2^2$.

a) Montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$, $N_c = F^{-1}(c)$ est soit une sous-variété soit vide.

b) En utilisant les coordonnées cylindriques : $(r, u) \mapsto (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos u, \frac{1}{2}\sin u, r)$, trouver un arc paramétré C^∞ régulier (I, γ) tel que $\gamma(I) = S^2 \cap N_{\frac{1}{4}}$.

c) Est-ce que $S^2 \cap N_{\frac{1}{4}}$ est une sous-variété ?

d) Quel sous-ensemble maximal de $S^2 \cap N_{\frac{1}{4}}$ est une sous-variété ?

Exercice 10 – Boule chevelue.
Le but de cet exercice est de montrer que la sphère S^n possède des champs de vecteurs C^∞ ne s'annulant jamais *ssi* n est impair.

a) Quel est l'espace tangent à S^n en un point $x \in S^n$?

b) Construire un champ de vecteur C^∞ sur S^n s'annulant en un seul point de S^n.

c) Si $n = 2p + 1$ construire un champ de vecteurs C^∞ sur S^n ne s'annulant jamais.

d) Soient K une partie compacte de $\mathbb{R}^{n+1}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n n+1$ contenant K et v une application C^∞ de U dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $F_t : U \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$ définie par $F_t(x) = x + tv(x)$. Montrer qu'il existe un ouvert V de U contenant K et $\epsilon > 0$ tels que pour tout $|t| \leqslant \epsilon$, F_t est un C^1 difféomorphisme de V sur son image. En déduire que la mesure de Lebesgue de $F_t(K)$ est alors un polynôme en t.

e) On suppose qu'il existe un champ v de vecteurs unitaires sur S^n. On pose à nouveau pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $F_t(x) = x + tv(x)$. Montrer que pour t suffisamment petit, F_t est un difféomorphisme entre S^n et la sphère de rayon $\sqrt{1+t^2}$. Conclure que n est impaire.