Feuille 6 - Équations différentielles

Exercice 1 – Critère de Cauchy pour la limite d'une fonction en un point.

a) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, soit $a \in \overline{U}$. Montrer que f admet une limite en a *ssi* $\forall \epsilon$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x, y \in U$, si $|x-a| < \eta$ et $|y-a| < \eta$, alors $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

b) Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application continue localement lipschitzienne en la seconde variable. On considère u une solution maximale de l'équation différentielle $y' = f(t, y(t))$ et I l'intervalle de définition de u. Montrer que pour tout $a \in I$ et tout compact K contenu dans U, il existe $t_+ \in I$ avec $t_+ > a$ et $t_- \in I$ avec $t_- < a$ tel que $(t_+, u(t_+)) \notin K$ et $(t_-, u(t_-)) \notin K$.

Exercice 2 – Périodicité.

Soit f est une fonction continue sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ localement lipschitzienne, et u est une solution maximale de $x'(t) = f(x(t))$ définie sur un intervalle ouvert I. On suppose de plus qu'il existe $t_1, t_2 \in I$ tels que $u(t_1) = u(t_2)$. Montrer que u est périodique et que u est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 – Barrière.

Soit $f \;: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, K-lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Soit $x : [t_0, t_0 + T[\to \mathbb{R}$ telle que $x'(t) = f(t, x(t))$ pour tout t et $y : [t_0, t_0 + T[\to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} y(t_0) \leqslant x(t_0) \\ y'(t) \leqslant f(t, y(t)) \quad \forall t \end{cases}$$

Montrer que $\forall t \in [t_0, t_0 + T[,\ y(t) \leqslant x(t)$.

Exercice 4 – Comportement asymptotique.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et X un champ de vecteurs continu sur U. On considère une application dérivable $f : [t_0, \infty[\to U$ telle que $f'(t) = X(f(t))$ et $f(t)$ tend vers $a \in U$ en $+\infty$. Montrer que a est un point singulier de X (*ie* que $X(a) = 0$).

Exercice 5 – Maximalité des solutions.

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + \alpha(t) x^2(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où α est une fonction continue de $[0, \infty[$ vérifiant $|\alpha(t)| \leqslant 1$ pour tout $t \geqslant 0$. Le but de l'exercice est de montrer que si $|x_0| < 1$ alors la solution maximale du problème de Cauchy est définie sur $\mathbb{R}^+$. On note $[0, T^*[$ le domaine d'existence de la solution maximale et on suppose que $T^* < +\infty$. On pose $|x_0| = 1 - \delta_0$ avec $\delta_0 \in]0, 1[$ et on considère $\delta \in]0, \delta_0[$. On pose alors

$$A = \{T \in [0, T^*[, \qquad \forall t \in [0, T], \quad |x(t)| \leqslant 1 - \delta\}$$

a) Montrer que $0 \in A$ et que A est un intervalle. On suppose que $\sup A < T^*$.

b) Montrer que, pour $t \in [0, T^*[$, on a

$$x(t) = \exp(-t) x_0 + \int_0^t \exp(-(t-s)) \alpha(s) x^2(s) \, \mathrm{d}s$$

c) En déduire, grâce au lemme de Grönwall que pour $T \in A$, on a $|x(t)| \leqslant |x_0| \exp(-\delta t)$ pour tout $t \in [0, T[$.

d) Montrer que $|x(t)| \leqslant 1 - \delta_0$ pour tout $t \in [0, \sup A]$. Aboutir à une contradiction et conclure.

Exercice 6 – Stabilité et flot.

On considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ localement lipschitzien. Pour tout $x \in \Omega$, on note J_x l'intervalle de définition de la solution maximale de l'équation différentielle $y' = f(y)$ telle que $y(0) = x$ et $D(f) = \cup_{x \in \Omega} J_x \times \{x\}$. On définit le flot associé à f, note ϕ, par $\phi_t(x) = y(t)$. Alors ϕ est une application continue sur l'ouvert $D(f)$ par le théorème de continuité par rapport aux conditions initiales.

Pour tout $x \in \Omega$ tel que $\phi_t(x)$ est définie pour tout $t \geqslant 0$, on définit $\omega(x)$ comme l'ensemble des $y \in \Omega$ tel qu'il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ et vérifiant $\phi_{t_n}(x) \to y$.

a) Montrer que $\omega(x)$ est stable par le flot de f *ie* que $\forall y \in \omega(x)$ et $\forall t \in J_x$, $\phi_t(y) \in \omega(x)$.

Exercice 7 – Wronskien.

On considère l'équation $y'' + py = 0$ avec p continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\int_{\mathbb{R}} |p| < \infty$.

a) Montrer que si y est solution bornée alors $y'(t) \longrightarrow_\infty 0$.

b) En utilisant le Wronskien d'une base de solutions, en déduire qu'il existe des solutions non bornées.

Exercice 8 – Norme et gradient. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$.

a) Si $n = 1$, montrer que la norme du gradient tend vers 0.

b) En raisonnant par l'absurde et en considérant l'équation $x'(t) = -\frac{\nabla f(x(t))}{\|\nabla f(x(t))\|^2}$, montrer le résultat pour $n \in \mathbb{N}$.