Barbara Gris, Frédéric Pascal

TD 1
Théorème du point fixe

Exercice 1

a) Montrer que le théorème de Picard n'est plus vrai si on ne suppose pas X complet.

b) Montrer que le théorème de Picard n'est plus vrai si on ne suppose pas l'application contractante (même avec l'inégalité $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$).

Exercice 2

a) Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite réelle (u_n) telle que $|u_{n+1} - u_n| \to 0$ est connexe par arc.

b) Soit X un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f : X \to X$ une fonction continue. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in X$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ et on suppose que $|u_{n+1} - u_n| \to 0$. Montrer que la suite (u_n) converge.

Exercice 3

a) On notera, pour A une partie d'un espace métrique, $\delta(A) = \sup\{d(x, y) | x, y \in A\}$ le diamètre de A. Démontrer le résultat suivant (théorème dit des fermés emboîtés) :
Un espace métrique (X, d) est complet ssi l'intersection de toute suite décroissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties fermées non vides de X telles que $\lim_{n\to+\infty} \delta(A_n) = 0$ est non vide.

b) Soit (X, d) un espace métrique complet non vide et $f : X \to X$ lipschitzienne de rapport $k \in [0, 1[$. Pour $R \in \mathbb{R}^+$, on pose $A_R = \{x \in X \ / \ d(x, f(x)) \leqslant R\}$.

i Montrer que $f(A_R) \subset A_{kR}$ et en déduire que pour tout $R \in \mathbb{R}^+_*$, A_R est une partie fermée non vide de X.

ii Soient $x, y \in A_R$. Montrer que $d(x, y) \leqslant 2R + d\left(f(x), f(y)\right)$ et en déduire que $\delta(A_R) \leqslant \frac{2R}{1-k}$.

iii Montrer que $A_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_{1/n}$ et en conclure que A_0 est non vide.

Exercice 4 Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un intervalle ouvert I et $a \in I$ un point fixe de f.

a) On suppose que $|f'(a)| < 1$. Montrer qu'il existe un intervalle fermé J stable par f de centre a tel que, pour tout $x_0 \in J$, la suite définie par $u_0 = x_0$ et $u_n = f(u_{n-1})$ pour $n \geqslant 1$ converge vers a.

b) Sous les hypothèses de la question précédente, on suppose de plus que f' ne s'annule pas sur J. Montrer que si $x_0 \neq a$ alors $u_n \neq a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $u_{n+1} - a \sim f'(a)(u_n - a)$.

c) Toujours sous les hypothèses de la première question, on suppose que f est de classe C^2 que $f'(a) = 0$ et que f'' ne s'annule pas sur J. Montrer que, si $x_0 \in J$ et $x_0 \neq a$ alors $u_n \neq a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $u_{n+1} - a \sim f''(a)(u_n - a)^2$.

d) On suppose que $|f'(a)| > 1$. Montrer qu'il existe un intervalle fermé J de centre a tel que pour tout $x_0 \in J$ et $x_0 \neq a$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sort de J.

Exercice 5 Soient (X, d) un espace métrique complet et $f_n : X \to X$ une suite de fonctions continues. On suppose que f_n admet un point fixe x_n.

a) On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X.

- i On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers x_0). Montrer que x_0 est un point fixe pour f.
- ii On suppose que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers x_0). Montrer que x_0 est un point fixe pour f.
- iii On suppose que f est contractante. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique point fixe de f.

b) on suppose maintenant que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur X. On suppose également qu'il existe $\alpha > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n soit α-lipschiztienne.

- i Montrer que f est α-lipschiztienne et que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0 alors x_0 est un point fixe de f.
- ii On suppose $\alpha < 1$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique point fixe de f. Montrer qu'on ne peut pas remplacer la condition $\alpha < 1$ par la condition $\alpha_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (où f_n est α_n-lipschitzienne). On pourra considérer l'opérateur $f_n : \ell^2 \to \ell^2$ défini par

$$f_n((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = (0, \ldots, 0, (1 - 1/n)x_n + 1/n, 0, \ldots)$$

- iii **Application.** Soient X un compact non vide d'un espace vectoriel normé qu'on suppose étoilé par rapport à l'un de ses points x_0 (c'est le cas par exemple si X est convexe). On suppose que $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|$ pour tous $x, y \in X$. Montrer que f a un point fixe (on pourra introduire une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et les fonctions $f_n(x) = (1 - t_n)f(x) + t_n x_0$). Peut-on retirer l'hypothèse de compacité ? (Pensez à une translation sur $\mathbb{R}$). Peut-on retirer l'hypothèse 'étoilé' ? (Pensez à une rotation sur le cercle).

Exercice 6

a) Soient (X, d) un espace métrique complet non vide et $f : X \to X$ une application (qu'on ne suppose pas continue). On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in [0, 1[$ tels que $d(f^N(x), f^N(y)) \leqslant \alpha d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$, c'est à dire que f^N est une contraction. Montrer que f a un unique point fixe x_0 et que, pour tout $x \in X$, la suite définie par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers x_0.

b) **Application**: Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $I = [a, b]$ un intervalle compact. On considère une fonction $K : I \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et ϕ une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$.

- i On suppose que $(b - a)\|K\|_\infty < 1$. Montrer qu'il existe une unique application continue $x : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$x(t) = \phi(t) + \int_a^b K(s, t)x(s)\,\mathrm{d}s$$

ii Montrer qu'il existe une unique fonction $x : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$x(t) = \phi(t) + \int_a^t K(s,t)x(s)\,\mathrm{d}s$$

Exercice 7 **Théorème de Sarkowski** Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une application continue. Pour $x \in I$, on dit que x est un point n-périodique lorsque $f^n(x) = x$ et $f^k(x) \neq x$ pour tout $k \in \{1, .., n-1\}$.

a) Si K est un segment inclus dans $f(I)$, montrer qu'il existe un segment $L \subset I$ tel que $K = f(L)$.

b) Montrer que si $I_0 \subset I$ est tel que $I_0 \subset f(I_0)$ alors f admet un point fixe dans I_0.

c) Si I_1 et I_2 sont deux segments quelconques de I tels que $I_2 \subset f(I_1)$, on notera désormais pour simplifier $I_1 \to I_2$. Montrer que si deux segments $I_0, I_1 \subset I$ vérifient $I_0 \to I_1 \to I_0$, alors f^2 admet un point fixe $x_0 \in I_0$ tel que $f(x_0) \in I_1$. En généralisant ceci, montrer que si $I_0 \to I_1 \to ... \to I_{n-1} \to I_0$, alors f^n admet un point fixe tel que $f^k(x_0) \in I_k$ pour tout $k \in \{1, .., n-1\}$.

d) On suppose que f admet un point 3-périodique $a \in I$. On note $b = f(a)$ et $c = f^2(a)$. Quitte à interchanger a et b, on peut supposer que $a = min\{a, b, c\}$. Dans le cas où $a < b < c$, on définit $I_0 = [a, b]$ et $I_1 = [b, c]$. Montrer que $I_0 \to I_1$, $I_1 \to I_0$, $I_1 \to I_1$. En déduire que f admet un point n-périodique pour tout $n \geqslant 1$. Raisonner de manière similaire pour $a < c < b$.

e) Le résultat précédent se généralise-t-il à des dimensions supérieures ?

f) **Application** Résoudre l'équation fonctionnelle $f^3 = id_{[0,1]}$ pour $f \in C([0,1],[0,1])$.