Feuille 0.3

Exercice 1 – Théorème de Banach Steinhaus. Soient $(E, |\cdot|_E)$ un espace de Banach, $(F, |\cdot|_F)$ un espace vectoriel normé et soit A une partie non vide de $L(E, F)$ (fonctions linéaires continues). Montrer que :

1. Soit $\{|f| \mid f \in A\}$ est borné
2. Soit il existe $x \in$ tel que $\sup_{f \in A} |f(x)|_F = +\infty$.

Exercice 2 – Application du théorème de Banach Steinhaus. Soient $(E, |\cdot|_E)$ un espace de Banach, $(F, |\cdot|_F)$ un espace vectoriel normé, et soit (f_n) une suite de $L(E, F)$ convergeant simplement vers $f : E \longrightarrow F$. Montrer que $f \in L(E, F)$.

Exercice 3 – Théorème d'Arzela Ascoli. Soit (E, d) un espace métrique compact et soit (F, d') un espace métrique complet. On dit qu'une partie A de $C(E, F)$ est relativement compacte si son adhérence est compacte. Montrer que $A \subset C(E, F)$ est relativement compacte *ssi* :

1. A est uniformément équicontinue, *ie* $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall f \in C(E, F)$, $\forall x, y \in E$, si $d(x, y) < \eta$ alors $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$.
2. Pour tout $x \in E$, $A(x) := \{f(x) \mid f \in A\}$ est relativement compact.