Algèbre :

Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications. (choisi)
Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Développements proposés : structure des sous groupes abéliens finis (choisi) ou théorème de Kronecker

Questions :

- soit G un groupe abélien fini, injectivité de la fonction

$$\mathbb{C}^{\widehat{G}} \to \widehat{G}$$

$$(a_\chi)_{\chi \in \widehat{G}} \longmapsto \sum_{\chi \in \widehat{G}} a_\chi \chi$$

- Nombre de générateurs de U_{24} (groupe des racines 24èmes de l'unité) ?
- Intersection de U_n et U_m ?
- Étude de $U_n(K)$ où K = R, K = C, K = F_p ?

Analyse :

228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications. (choisi)
261 : Fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

Développements proposés :
sev stables par translation (choisi) ou théorème de Weierstrass par les polynôme de Bernstein

Questions :

- fonction uniformément continue non lipschitzienne ?
- qu'est ce qu'une fonction convexe ? que signifie la définition sur un dessin ? continuité de fonctions convexes ?
- comment montrer la continuité/dérivabilité de la fonction continue nulle part dérivable de mon plan ? (j'ai fait un dessin, ça leur a suffit)
- CNS pour que f(2x) - f(x) / x admette une limite ?
- F sev fermé de C(R,R) inclus dans C1(R,R). Montrer que F est de dimension finie. Indication : montrer que la dérivation est continue sur F.

Modélisation :

Choix entre deux textes de statistiques dont un qui semblait extrêmement calculatoire. J'ai choisi l'autre.
Texte choisi très court (seulement 3 recto), aucune preuve de faite dans le texte, seulement parfois des indications mais sans jamais rentrer dans les détails.

On étudie des suites (X_n) numérotée dans $\mathbb{Z}$ telles que la loi de $(X_i, ...X_{i+p})$ est la même que la loi de $(X_j, ...X_{j+p})$.

On veut expliquer des phénomènes qui dépendent linéairement des valeurs passées i.e. on veut résoudre

$$X_k = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{k-i} + \epsilon_k$$

où ϵ_k iid centrées, dans L^2.
Fichier de données : cours de l'euro par rapport à l'US, moyennes mensuelles sur 10 ans.
Dans le texte, on étudie seulement les cas p = 1 et p = 2.

p = 1

On cherche à résoudre $X_k = \alpha X_{k-1} + \epsilon_k$ pour $k \in \mathbb{Z}$. On trouve $X_k = \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha^i \epsilon_{k-i}$.
On cherche à calculer les covariances. On trouve (formule donnée dans le texte) et en particulier, si on note $r(k) = cov(X_0, X_k)$, $r(k) = \alpha r(k-1)$.

p = 2

On cherche à résoudre $X_k = \alpha X_{k-1} + \beta X_{k-2} + \epsilon_k$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
On trouve $X_k = \sum a_i \epsilon_{k-i}$ où les a_i sont les coefficients du DSE de $\frac{1}{z^2 - \alpha z - \beta}$.
On montre une relation entre les a_i.
Relation entre les covariances : $r(k) = alphar(k-1) + betar(k-2)$.

Estimation

On dispose d'une observation de X : $(X_1,...,X_n)$.
Estimation de $cov(X_0, X_k)$ par $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} X_i X_{i+k}$.
Étude de cet estimateur.
A l'aide des relations entre les covariances, on trouve des estimateurs de α et β.