Rapport d'oraux de l'agrégation

Corentin Le Coz

du 2 au 4 Juillet 2017

1 Algèbre

Tirage :
- 102 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications. (celle que j'ai choisie)
- 125 Extensions de corps. Exemples et applications.

Développements proposés :
- Théorème de Wedderburn. (choix du jury)
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$.

Questions sur le développement :
- Précisez les inégalités de la fin. (il y avait une erreur)
  - J'ai fait un dessin avec 1, $cos(\theta)$, et q sur un axe. Cela a suffit.
- Que faut-il vérifier pour pouvoir affirmer que k est un $Z(k)$ espace vectoriel ?
  - j'ai énoncé les axiomes des espaces vectoriels
- Quelles hypothèses fait-on exactement sur k ?
  - (je ne les avaient pas notées dans le plan, ni au tableau) j'ai énoncé les axiomes, et ils m'ont demandé de les écrire.
- Comment vérifier que k_x est un $Z(k)$ espace vectoriel ?
  - j'ai dit que c'était pareil que pour k. Ils attendaient plutôt que je dise que c'était un sev de k.

Questions sur le plan :
- Écrire les premiers polynômes cyclotomiques.
  - Je me suis excusé d'avoir oublié de les mettre dans le plan. Ensuite, je suis parti tête baissée dans l'énumération des polynômes cyclotomiques... Je voulais en écrire une petite dizaine mais ils m'ont arrêté dès le cinquième pour me demander comment on les calculaient. J'ai expliqué qu'on les calculait récursivement en utilisant la factorisation de $X^n - 1$, comme c'était marqué dans mon plan.
- Comment obtenir l'irréductibilité des Φ_p pour p premier ?

  - Les mots clés "Eisenstein" et "changement de variable" ont suffi à les convaincre.
- Montrer que tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps est cyclique en utilisant la classification des groupes abéliens finis.
  - J'ai répondu en rigolant que je connaissais deux démonstrations mais pas celle-là. Ils m'ont invité à continuer à chercher. Au bout de quelques secondes je me suis écrié "ah oui ! $X^{n_1} - 1$ aurait trop de racines !". Ils ont souhaité que je me calme un peu (j'étais très très excité !) et que j'écrive une démonstration.
- Qu'est-ce que $\phi(n)$?
  - J'ai dit que c'était le nombre d'inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Comment on le calcule ?
  - J'ai commencé à parler de l'algorithme naïf qui constiste à énumérer tous les nombres entre 1 et n. Cela ne leur plaisait pas du tout alors ils m'ont coupé la parole. J'ai donc conclu avec le théorème chinois.
- Donner une extension cyclomique qui contient $\sqrt{2}$. (j'avais mis le théorème de kronecker-weber (version Perrin) dans mon plan)
  - J'ai marqué au tableau $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$. Ils ont voulu que je précise un peu, ce que j'ai fait à l'oral.

Exercices :

- Déterminer les n tels que $Gl_n(\mathbb{Q})$ admette un sous-groupe d'ordre 5.
  - J'ai tout de suite répondu que c'était à équivalent à trouver des éléments d'ordre 5. J'ai commencé à parler de diagonalisation dans $\mathbb{C}$, et que, par exemple, la trace était rationnelle, sans succès. Mais ils m'écoutaient attentivement. Nécessairement, le polynôme minimal est alors Φ_5 ou $X^5 - 1$. J'ai un peu cafouillé pour arriver à cette conclusion. Un membre du jury m'a fait remarqué que cela donnait une condition sur la dimension, c'était qu'elle était supérieure ou égale à 4.

    Finalement, j'ai réalisé que la matrice compagnon de Φ_5 était un exemple de matrice d'ordre 5 en dimension 4. Ils m'ont demandé de conclure pour les dimensions supérieures. J'ai laborieusement fini par comprendre qu'il suffisait d'écrire une matrice diagonale par blocs avec un premier bloc égal à $\mathcal{C}(\Phi_5)$ et un deuxième à I_{n-4}.
- Donner la nature de $\Sigma \sin(n)/n$.
  - J'ai tout de suite écrit que c'était la partie imaginaire de $\Sigma \exp(in)/n$. Je me doutais qu'on ferait une transformation d'Abel, mais je ne suis pas parti tout de suite (principalement par fatigue). L'examinatrice m'a rapidement demandé si je connaissais la transformation d'Abel. J'ai évidemment répondu que c'était ce que j'allais faire. J'ai donc montré que $exp(in)$ était de somme bornée. Ensuite j'ai énoncé le théorème des séries d'Abel et lorsque j'ai dit "on remplace v_n par $S_n - S_{n-1}$, ils étaient convaincus et l'oral s'est arrêté.

Conclusion Le jury était très sympathique. J'étais tout excité et en pleine forme ; l'oral était vivant et intéressant. J'ai découvert des choses et je leur ai fait part de mon émerveillement, mais je crains qu'ils ne m'aient pris pour un savant fou, surtout que mon développement était un peu brouillon.

Ils ne m'ont pas embêté sur des détails accessoires et, même s'ils ne se satisfaisaient pas d'une pensée brute, un raisonnement bien mené à l'oral semblaient leur convenir. Sauf erreur de ma part, le temps de questions a duré 45 minutes, ce qui m'a permis de bien m'exprimer.

2 Analyse

Tirage :
- 203 Utilisation de la notion de compacité. (celle que j'ai choisie)
- 236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Développements proposés :
- Diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints sur un espace de Hilbert séparable. (choix du jury)
- Théorème de Stone-Weierstrass

Questions sur le développement :
- Prouver que x_n converge faiblement vers x implique que Tx_n converge fortement vers Tx.
  - Je n'avais pas eu le temps de revoir cela. Je me suis souvenu qu'il suffisait de montrer que Tx_n n'avait qu'une seule valeur d'adhérence. J'ai fini par m'en sortir après avoir réfléchi un peu. Je n'avais pas mis la définition d'un opérateur compact, ils me l'ont demandée.
- Montrer que si x_n converge fortement vers x et y_n converge faiblement vers y, alors $< x_n, y_n >$ converge vers $< x, y >$.
  - Là encore, je n'avais pas anticipé. J'avais le souvenir que la preuve étaient compliqué, ce qui m'a paralysé (alors que c'est très simple en réalité !). Heureusement, un des membres du jury m'a aidé et cela a été vite ensuite.
- Question bizarre : est-ce que votre preuve fait apparaître que le spectre est dénombrable ?
  - J'ai dit que s'il ne l'était pas, on aurait une base Hilbertienne indénombrable (formée de vecteurs propres). Il n'était pas convaincu, je n'ai pas trouvé d'argument satisfaisant donc on est passé à autre chose.

Questions sur le plan :
- Êtes-vous sûr du signe "+" dans votre équation différentielle ?