1 Oral d'Algèbre

Je suis tombé sur le couplage suivant :

141 - Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

183 - Utilisation de groupes en géométrie.

J'ai choisi la leçon 141. J'ai proposé les deux développements suivants :

1. Endomorphismes semi-simples,
2. Lemme d'Artin et correspondance de Galois.

J'ai été interrogé sur le premier développement.

Questions sur le développement

– Re-détailler deux points. Dans la démonstration de (F simple) implique (F cyclique et Π_{u_F} irréductible), on m'a demandé de justifier que si P est un facteur irréductible de Π_{u_F}, $P(u_F)$ est injectif. Dans la démonstration de (Π_u n'est pas divisible par le carré d'un irréductible) implique (E se décompose comme somme directe de sev simples), on m'a demandé de détailler pourquoi le lemme des noyaux permettait de se restreindre au cas où Π_u est irréductible.

– Vous dites que u est diagonalisable dans une extension de k. Qu'est-ce que cela signifie ? (Je m'en veux de ne pas m'être posé cette question avant, parce qu'elle est vraiment légitime. On a commencé à parler de prolonger la k-linéarité en une K-linéarité, mais on s'est rendus compte que ce n'était pas si évident et qu'il valait mieux prendre le point de vue matriciel.)

– Justifier que le polynôme minimal est invariant par changement de corps.

Dans la suite, le jury mélangeait les questions sur les plans et les exercices, mais pour plus de clarté, je les sépare dans ce rapport.

Questions sur le plan

– Qu'est-ce qu'un groupe résoluble ?

– Donner un exemple de corps non parfait. Justifier.

– Pourquoi $\overline{\mathbb{Q}}$ est un corps ? Pourquoi $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{C}$? J'ai répondu à cette question en disant que l'un était dénombrable et l'autre non, donc le jury m'a demandé quelques exemples de nombres transcendants sur $\mathbb{Q}$. J'ai cité e et π, puis on m'a demandé si je n'avais pas un exemple plus simple de nombre transcendant (je n'ai pas su répondre à cette question).

– A propos de l'algorithme de Berlekamp : avez-vous une idée d'un algorithme de factorisation sur $\mathbb{Z}$ à partir de l'algorithme de Berlekamp ? (Je n'ai pas su répondre)

– Comment démontrez-vous l'existence et l'unicité du corps de rupture ?

– J'avais admis le théorème de Steinitz (existence et unicité à isomorphisme près d'une clôture algébrique) dans mon plan, en disant qu'il reposait sur le lemme de Zorn. Le jury m'a demandé si je ne pouvais pas construire une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$ sans. J'ai répondu qu'on pouvait prendre la réunion des $\mathbb{F}_{p^n}$, et ils m'ont demandé si on devait vraiment prendre la réunion pour tous les n. Il suffisait ensuite de dire que $\mathbb{F}_{p^n} \subset \mathbb{F}_{p^m}$ si et seulement si $n|m$, et donc on pouvait remplacer n par $n!$.

Exercices

1. Soit $P \in \mathbb{F}_q[X]$ un polynôme séparable.
   - Donner un algorithme pour déterminer le nombre r de polynômes irréductibles dans la décomposition de $P = P_1 ... P_r$. (C'est fait dans la plupart des ouvrages qui parlent de Berlekamp, notamment dans le Hindry. L'ingrédient clé est l'isomorphisme chinois.)
   - La question précédente ramène le problème au calcul du rang d'une matrice. Comment calculez-vous le rang d'une matrice ?
   - Quelle est la complexité de l'algorithme du pivot de Gauss ?
2. Soit p un nombre premier.
   - Quel est le degré de $\alpha = \cos(\frac{2\pi}{p})$ sur $\mathbb{Q}$?
   - Pourquoi le degré de $\exp(\frac{2i\pi}{p})$ sur $\mathbb{Q}$ est $p-1$? Est-ce toujours le cas pour p non premier ?
   - Un membre du jury m'a demandé quel était le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$, mais un autre membre du jury l'a coupé en disant que c'était un peu long et qu'il voulait me donner un autre exercice.
3. Soit $P = X^4 - 2$.
   - Déterminer le degré de l'extension de décomposition.
   - Déterminer le groupe de Galois de P sur $\mathbb{Q}$ (c'est le groupe diédral).
   - Etudier la correspondance de Galois sur quelques exemples. (J'ai commencé à étudier le sous-corps fixé par les rotations, mais je n'ai pas eu le temps de finir.)

2 Oral d'Analyse

Je suis tombé sur le couplage suivant :

246 - Séries de Fourier. Exemples et applications.

236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

J'ai choisi la leçon 246. J'ai proposé les deux développements suivants :

1. Existence d'une fonction continue dont la série de Fourier diverge en 0 (avec Baire),
2. Théorème de Paley-Wiener.

J'ai été interrogé sur le deuxième développement.