Épreuves orales de l'agrégation 2017

Kevin Massard

28 juin 2017

1 Algèbre

Leçons

- 126 - Exemples d'équations diophantiennes.
- 157 - Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Leçon choisie 157

Développements

- Calcul de l'image de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par l'exponentielle.
- Existence des invariants de similitude et réduction de Frobenius.

Développement choisi par le jury Calcul de l'image de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par l'exponentielle.

Question sur le développement

- Détailler la preuve de la bijectivité de l'exponentielle entre les nilpotents et les unipotents.

Questions sur le plan

- Montrer la caractérisation d'une matrice nilpotente.
- Comment lire la dimension des sous-espaces propres sur la décomposition de Jordan ?
- Quel est le lien entre les invariants de similitude et les polynômes minimal et caractéristique ?

Exercices

- Résoudre l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
- Calculer la réduction de Frobenius de $\operatorname{diag}(1,1,1,2,2,3) \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$.

2 Analyse

Leçons

- 204 - Connexité. Exemples et applications.
- 235 - Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

Leçon choisie 235

Développements

- Méthode de Laplace et calcul d'un équivalent de $\Gamma(t+1)$ en $+\infty$.
- Formule d'inversion de Fourier.

Développement choisi par le jury Méthode de Laplace et calcul d'un équivalent de $\Gamma(t+1)$ en $+\infty$.

Questions sur le développement

- Expliquer l'idée générale de la méthode.
- Préciser la fonction à laquelle on applique le théorème de convergence dominée.

Questions sur le plan

- Énoncer l'idée de la preuve du théorème de continuité des intégrales à paramètres.
- Que dire du comportement en $\pm\infty$ de la transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$.
- Le montrer.

Exercice

- Étudier la définition et le comportement en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u+x} \mathrm{d}u$.

3 Modélisation - option B

Sujets

- Algèbre linéaire, optimisation.
- Équations aux dérivées partielles, équations différentielles ordinaires.

Sujet choisi Équations aux dérivées partielles, équations différentielles ordinaires.

Le texte porte sur l'étude de la formation et du développement des microtubules (MT), éléments du cytosquelette des cellules intervenant notamment dans la mitose, à partir de dimères de tubuline (DT). La première phase, appelée nucléation, est l'assemblage de DT pour former la base des MT, jusqu'à ce que la concentration en DT atteigne un certain seuil. La seconde, appelée polymérisation, est l'élongation des MT à partir des DT. Suite à cela, les MT se raccourcissent et produisent des dimères de tubuline instables (DTI). C'est la dépolymérisation. Enfin, une partie DTI sont recyclés pour redonner des DT. Et ainsi de suite. On part d'un milieu ne contenant que des DT. Le phénomène est décrit par les concentrations en MT, DT et DTI, vérifiant un système de trois équations :

- une équation de transport liant la dérivée partielle de la concentration en MT par rapport au temps et la dérivée partielle de la concentration en MT par rapport à la longueur des MT, et comportant un terme intégral
- deux équations différentielles ordinaires, dont une contenant un terme intégral

Le texte exprime brièvement la mise en équations et énonce un lemme sur la conservation de la quantité totale de tubuline, dont la démonstration est suggérée. Il présente ensuite une version simplifiée du système en considérant que la vitesse de polymérisation est l'identité et que la dépolymérisation est totale. On peut alors monter l'existence et l'unicité de la solution, sa définition pour tout temps et la positivité de ses composantes. On s'interroge ensuite sur la stabilité d'un point d'équilibre, que l'on constate par la résolution numérique du système. La méthode de Newton permet de calculer explicitement ce point d'équilibre. La suite du texte, que je n'ai pas lue, portait exclusivement sur les équations aux dérivées partielles et leurs schémas numériques.

Lors de mon exposé, j'ai expliqué le phénomène, la mise en équations, montré la loi de conservation et des propriétés de la solution du système simplifié. J'ai enfin présenté numériquement le calcul d'une solution approchée, l'évolution des trois concentrations en fonction du temps, avec différents paramètres, et le champ de vecteurs dans différents plans.

Questions

- Expliquer les différentes phases du phénomène sur la représentation graphique des solutions.
- Expliquer comment déduire de la représentation du champ de vecteurs la positivité des trois concentrations.
- Que dire sur l'équation de transport $\partial_t u - c\partial_x u = 0$ (solution, effet sur une condition initiale particulière) ?
- Quel schéma peut-on mettre en oeuvre pour résoudre numériquement le système ?
- Qu'est-ce que l'erreur de consistance, l'ordre, l'erreur globale ?