Algèbre

Le couplage :

108 – Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

158 – Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Mon choix : 158.
Les développements proposés :

(i) Le principe du maximum faible (celui que j'ai présenté en cours),

(ii) L'exponentielle induit un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Leur choix : (ii).
Ma perf : 14'58" (la grande classe).
La suite : Ils m'ont demandé :

- s'il y avait un résultat analogue en remplaçant $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ par $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$. J'ai parcouru la démonstration en regardant ce qui changeait. Finalement la démonstration s'adaptait bien au cas des matrices hermitiennes (on a toujours l'injectivité car les valeurs propres sont réelles) donc j'ai dit oui.
- pourquoi l'exponentielle est continue, pourquoi $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est fermé, pourquoi $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ est fermé. Ils m'ont demandé d'étudier la topologie de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. J'ai dit que c'était un ouvert, ils m'ont demandé pourquoi, j'ai galéré, ils m'ont demandé si je connaissais une caractérisation des matrices symétriques définies positives, je leur ai parlé de la caractérisation de Sylvester (que je n'avais pas mis dans le plan par oubli), ils m'ont demandé de démontrer ce résultat, j'ai galérer mais avec un peu d'aide c'est passé.
- ce que je savais de l'image de l'ensemble des matrices antisymétriques par l'exponentielle. J'ai montré que c'était $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ en utilisant le théorème de réduction des endomorphismes antisymétriques mais en fait il y avait plus simple (du genre vraiment simple).
- de démontrer l'existence d'une base orthogonale pour les formes quadratiques, après une minute de silence (une minute sans rien dire c'est long et gênant), on est passé à autre chose.
- s'il y avait un lien entre l'ellipsoïde de John Loewner et le fait que tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ soit inclus dans le groupe orthogonal d'une forme quadratique. J'ai dit oui. Ça leur a plu.
- des précisions sur le théorème de décomposition polaire. J'avais pas mis dans mon plan que la décomposition polaire était un homéomorphisme (juste l'existence et l'unicité, c'était à la fin de mon plan et j'étais en rush), du coup je l'ai dit. Ils m'ont demandé si je connaissais une autre décomposition qui ressemble à la décomposition polaire. J'ai hésité à balancer la décomposition OT (merci Julien) mais ils ne m'ont pas laissé le temps et ont embraillé sur la décomposition ODO' avec O et O' dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale. Ils m'ont demandé de décrire les orbites.

La conclusion : avant tout, une formidable expérience humaine mais aussi, 3 étages à monter avec une valise pesant au moins 15kg d'algèbre, des surveillants trop souriants pour pas être hypocrites, un jury dont le niveau de forme commence déjà à baisser alors qu'on vient à peine d'entamer la deuxième semaine, des questions clairement en dessous de la ceinture et un mépris non feint à mon égard.