ENS Cachan, DPT Maths

Optimisation numérique M1 – TD10 – Optimisation en dimension infinie

Florian De Vuyst, Adrien Le Coënt - CMLA UMR 8536, ENS Cachan

1 Décembre 2016

Non existence de la projection sur un sous-espace vectoriel fermé d'un espace préhilbertien

Soit $E := \mathcal{C}([-1,+1],\mathbb{R})$ structuré en espace préhilbertien réel grâce au produit scalaire $\langle f,g\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.

Soit $V := \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}$.

1. Vérifier que V est un sous-espace vectoriel fermé de E.

2. Soit $x\ :\ t \in [-1,+1] \longmapsto x(t) = 1$. Montrer que x n'a pas de projection dans V.

Approximation éléments finis d'un problème d'optimisation aux dérivées partielles elliptique

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière lipschitzienne. On cherche $u \in H_0^1(\Omega)$ solution du problème de minimisation

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} \quad \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega v^2\,dx - \int_\Omega f v\,dx$$

pour $\alpha > 0$ et $f \in L^2(\Omega)$.

Pour l'approximation numérique de ce problème d'optimisation on définit une triangulation (ou un maillage) $\mathscr{T}^h$ du domaine Ω constituée de triangles notés génériquement K. L'ensemble

$$\Omega^h = \cup_{K \in \mathscr{T}^h} K$$

est une "discrétisation" de Ω. On introduit un espace discret $V^h \subset H_0^1(\Omega)$ dit éléments finis P^1 défini comme

$$V^h = \left\{ v^h \in \mathscr{C}^0(\Omega^h),\ \forall K \in \mathscr{T}^h,\ v^h_{|K} \in P^1(K), v^h = 0 \text{ sur } \partial\Omega^h \right\}.$$

On cherche alors $u^h \in V^h$ solution du problème d'optimisation en dimension finie
$$\min_{v^h \in V^h} \quad \frac{1}{2}\int_{\Omega^h} |\nabla v^h|^2\,dx + \frac{\alpha}{2}\int_{\Omega^h} (v^h)^2\,dx - \int_{\Omega^h} f v^h\,dx$$
On introduit des fonctions de bases $w_i(x) \in V^h$ de V^h définies telles que
$$w_i(S_j) = \delta_{ij}$$
pour S_j nœuds du maillage $\mathscr{T}^h$, et i tel que $S_i \notin \partial\Omega^h$. On définit la matrice carrée A d'éléments
$$A_{ij} = \int_{\Omega^h} \nabla w_i \cdot \nabla w_j\,dx,$$
pour i, j tels que S_i, S_j nœuds de $\mathscr{T}^h$, $S_i, S_j \notin \partial\Omega^h$.

1. Montrer que A est une matrice creuse, symétrique définie positive.
2. Pour $K \in \mathrm{Supp}(w_i) \cap \mathrm{Supp}(w_j)$, calculer explicitement la quantité
$$A_{ij}^K = \int_K \nabla w_i \cdot \nabla w_j\,dx.$$
3. En déduire un algorithme de calcul numérique de la matrice A.
4. Refaire les questions 1. 2. et 3. pour la matrice M d'éléments M_{ij} définis par
$$M_{ij} = \int_{\Omega^h} w_i(x)\,w_j(x)\,dx.$$
5. En cherchant $u^h(x)$ sous la forme
$$u^h(x) = \sum_{S_i \in \mathscr{T}^h,\ S_i \notin \partial\Omega^h} u_i\,w_i(x),$$
et en notant le vecteur $\boldsymbol{u} = (u_i)_i$, montrez que l'unique solution du problème discret est solution d'un grand système linéaire creux de la forme
$$(A + \alpha M)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$$
(on précisera ce qu'est le vecteur $\boldsymbol{f}$).