ENS Cachan, DPT Maths

Optimisation numérique M1 – TD1

Florian De Vuyst, Adrien Le Coënt, Lara Raad
CMLA UMR 8536, ENS Cachan

14 septembre 2016

1 Normes matricielles

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée. Montrer que

$$\|A\|_1 = \sup_{v\in\mathbb{C}, v\neq 0} \frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} = \max_j \sum_i |a_{ij}| \ ; \tag{1}$$

$$\|A\|_2 = \sup_{v\in\mathbb{C}, v\neq 0} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(A^\star A)} = \sqrt{\rho(AA^\star)} = \|A^\star\|_2 \ ; \tag{2}$$

$$\|A\|_\infty = \sup_{v\in\mathbb{C}, v\neq 0} \frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \|A^\star\|_1. \tag{3}$$

(4) La norme $\|.\|_2$ est invariante par transformation unitaire :

$$UU^\star = I \to \|A\|_2 = \|AU\|_2 = \|UA\|_2 = \|U^\star AU\|_2.$$

(5) Si A est normale ($AA^\star = A^\star A$), alors

$$\|A\|_2 = \rho(A).$$

(6) Soit A une matrice carrée quelconque et $\|.\|$ une norme matricielle quelconque. Montrer que

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

2 Suite des puissances successives d'une matrice

On admettra le résultat suivant : Etant donné une matrice A et un nombre $\varepsilon > 0$, il existe au moins une norme matricielle subordonnée $\|.\|$ telle que

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Soit B une matrice carrée. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\lim_{k\to\infty} B^k = 0$;
ii) $\lim_{k\to\infty} B^k v = 0$;
iii) $\rho(B) < 1$;
iv) $\|B\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée.

3 Conditionnement de systèmes linéaires

Soit A une matrice inversible, b un vecteur non nul, u et $(u + \delta u)$ les solutions respectives des systèmes linéaires

$$Au = b,$$
$$A(u + \delta u) = b + \delta b.$$

Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée, on note $cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ le conditionnement de la matrice A. Montrer que

$$\frac{\|\delta u\|}{\|u\|} \leq cond(A)\,\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

Montrer que la majoration est optimale.

4 Conditionnement de systèmes linéaires 2

Soit A une matrice inversible, b un vecteur non nul et u et $(u + \Delta u)$ les solutions respectives des systèmes linéaires

$$Au = b,$$
$$(A + \Delta A)(u + \Delta u) = b.$$

Montrer que l'on a l'inégalité

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u + \Delta u\|} \leq cond(A)\,\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

et que c'est la meilleure inégalité possible.

5 Calcul différentiel

(1) On se place dans $H = \mathbb{R}^n$, A une matrice carrée et b un vecteur de H. On dénote par $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire usuel dans V. Calculer respectivement la différentielle et le gradient des applications

$$x \mapsto \|x\|_2^2,$$
$$x \mapsto \langle Ax, b \rangle.$$

(2) Soit $V = \mathbb{R}^n$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive, $\mu > 0$ et $b \in V$. Soit

$$J(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u \rangle - \langle b, u \rangle + \frac{1}{2}\mu\|u\|^2.$$

Calculer $\nabla J(u)$ et $\nabla^2 J(u)$.

6 Condition nécessaire de minimum relatif

Soit Ω un ouvert d'un e.v.n. V et $J : \Omega \subset V \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dans Ω, deux fois dérivale en un point u $\in \Omega$. Si la fonction J admet un minimum relatif en u, montrer que

$$J''(u)(w, w) \geq 0 \quad \forall \ w \in V. \tag{4}$$

7 Condition suffisante de minimum relatif

Soit Ω un ouvert d'un e.v.n. V, u un point de Ω, et $J : \Omega \subset V \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dans Ω telle que $J'(u) = 0$.

(1) Si la fonction J est deux fois dérivable en u et s'il existe un nombre α tel que,

$$\alpha > 0 \text{ et } J''(u)(w, w) \geq \alpha\|w\|^2 \quad \forall \ w \in V,$$

montrer que la fonction J admet un minimum relatif strict en u.

(2) Si la fonction J est deux fois dérivable dans Ω, et s'il existe une boule $B \subset \Omega$ centrée en u telle que

$$J''(v)(w, w) \geq 0 \quad \forall \ v \in B, w \in V,$$

montrer que la fonction J admet un minimum relatif en u.

8 Condition nécessaire de minimum relatif sur un ensemble convexe

Soit $J : \Omega \subset V \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert Ω d'un e.v.n. V et U une partie convexe de Ω. Si la fonction J est dérivable en un point u $\in U$ et si elle admet en u un minimum relatif par rapport à U, montrer que

$$J'(u)(v-u) \geq 0 \quad \forall \; v \in U.$$

9 Fonctions convexes

9.1 Derivabilité première

Soit $J : \Omega \subset V \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dans un ouvert Ω d'un e.v.n. V, et U une partie convexe de Ω, montrer que

(1) La fonction J est convexe sur U sii

$$J(v) \geq J(u) + J'(u)(v-u) \quad \forall \; u, v \in U.$$

(2) La fonction J est strictement convexe sur U sii

$$J(v) > J(u) + J'(u)(v-u) \quad \forall \; u, v \in U, \;\; u \neq v.$$

9.2 Derivabilité seconde

Soit $J : \Omega \subset V \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable dans un ouvert Ω d'un e.v.n. V, et U une partie convexe de Ω, montrer que

(3) La fonction J est convexe sur U sii

$$J''(u)(v-u, v-u) \geq 0 \quad \forall \; u, v \in U.$$

(4) Si

$$J''(u)(v-u, v-u) > 0 \quad \forall \; u, v \in U, \;\; u \neq v,$$

la fonction J est strictement convexe.

10 Minimum des fonctions convexes

Soit U une partie convexe d'un e.v.n. V.

(1) Si une fonction convexe $J : U \subset V \to \mathbb{R}$ admet un minimum relatif en un point de U, montrer que elle y admet un minimum (par rapport à tout l'ensemble U).

(2) Montrer que une fonction $J : U \subset V \to \mathbb{R}$ strictement convexe admet au plus un minimum, et c'est un minimum strict.

(3) Soit $J : U \subset V \to \mathbb{R}$ une fonction convexe définie sur un ouvert Ω de V contenant U, dérivable en un point u $\in$ U. Montrer que la fonction J admet un minimum en u par rapport à U sii

$$J'(u)(v-u) \geq 0 \quad \forall \ v \in U.$$

(4) Si l'ensemble U est ouvert, montrer que la condition précédente equivaut à l'équation d'Euler $J'(u) = 0$.