ENS Cachan, DPT Maths

Optimisation numérique M1
TD2 – Convexité, méthode de gradient

Florian De Vuyst, Adrien Le Coënt, Lara Raad
CMLA UMR 8536, ENS Cachan

22 septembre 2016

1 Condition nécessaire de minimum relatif sur un ensemble convexe

Soit $J : \Omega \subset V \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert Ω d'un e.v.n. V et U une partie convexe de Ω. Si la fonction J est dérivable en un point u $\in U$ et si elle admet en u un minimum relatif par rapport à U, montrer que

$$J'(u)(v-u) \geq 0 \quad \forall \ v \in U.$$

2 Fonctions convexes

2.1 Derivabilité première

Soit $J : \Omega \subset V \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dans un ouvert Ω d'un e.v.n. V, et U une partie convexe de Ω, montrer que

(1) La fonction J est convexe sur U sii

$$J(v) \geq J(u) + J'(u)(v-u) \quad \forall \ u, v \in U.$$

(2) La fonction J est strictement convexe sur U sii

$$J(v) > J(u) + J'(u)(v-u) \quad \forall \ u, v \in U, \ u \neq v.$$

2.2 Derivabilité seconde

Soit $J : \Omega \subset V \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable dans un ouvert Ω d'un e.v.n. V, et U une partie convexe de Ω, montrer que

(3) La fonction J est convexe sur U sii

$$J''(u)(v-u, v-u) \geq 0 \quad \forall \ u, v \in U.$$

(4) Si

$$J''(u)(v-u, v-u) > 0 \quad \forall \ u, v \in U, \ \ u \neq v,$$

la fonction J est strictement convexe.

3 Méthode de gradient à pas variable

3.1 Convergence

Dans cette partie, on va analyser la convergence des méthodes de gradient à pas variable

$$u_{k+1} = u_k - \rho_k \nabla J(u_k)$$

avec $\rho_k > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Soit $V = \mathbb{R}^n$ et $J : V \to \mathbb{R}$ dérivable dans V. On suppose qu'il existe des constantes $\alpha > 0$ et $M > 0$ telles que

$$\langle \nabla J(v) - \nabla J(u), v - u \rangle \geq \alpha \|v-u\|^2 \quad \forall u, v \in V,$$

$$\|\nabla J(v) - \nabla J(u)\| \leq M \|v - u\| \quad \forall u, v \in V.$$

Supposons qu'il existe deux nombres a et b tels que

$$0 < a \leq \rho_k \leq b < \frac{2\alpha}{M^2} \quad \forall k \geq 0.$$

On note u la solution du problème de minimisation. Montrer alors que la méthode du gradient à pas variable converge et que la convergence est géométrique : il existe $\beta = \beta(\alpha, M, a, b) < 1$ tel que

$$\|u^k - u\| \leq \beta^k \, \|u^0 - u\|.$$

3.2 Cas d'une fonctionnelle elliptique quadratique

Considérons le cas d'une fonctionnelle quadratique avec A définie positive

$$J : v \in \mathbb{R}^n \to J(v) = \frac{1}{2}\langle Av, v \rangle - \langle b, v \rangle.$$

On note $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A.
Soit la fonction $\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mu(\rho) = \max\{|1 - \rho\lambda_1|, \, |1 - \rho\lambda_n|\}.$$

Montrer alors que a et b tels que

$$0 < a \leq \rho_k \leq b < \frac{2}{\lambda_n}$$

conviennent pour garantir la convergence et

$$\beta = \max\{\mu(a), \mu(b)\}.$$

Montrer que la valeur optimale du paramètre ρ ici correspond à

$$\rho^\star = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$$

et montrer que

$$\mu(\rho^\star) = \frac{cond_2(A) - 1}{cond_2(A) + 1}.$$

Commenter.