ENS Cachan, DPT Maths

Optimisation numérique M1 – TD5 – Optimisation sous contraintes

Florian De Vuyst, Adrien Le Coënt - CMLA UMR 8536, ENS Cachan

20 Octobre 2016

Démonstration de cours

$$C(u) = \{0\} \bigcup \{w \in V \text{ pour lesquels il existe au moins une suite de points } \{u_k\}_k / u_k \in U,\ u_k \neq u,\ \lim_k u_k = u \quad \lim_k \frac{u_k - u}{\|u_k - u\|} = \frac{w}{\|w\|},\ w \neq 0\}$$

Théorème

1) $\forall u \in U,\ C(u)$ est fermé ;

2) $J : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset V$ ouvert. Si J admet en un point un minimum relatif sur U, et si J est différentiable en u, alors :

$$DJ(u)(v - u) \geq 0 \quad \forall v \in u + C(u).$$

Exercice : Montrer que $C(u)$ est fermé.

Théorème de sensibilité

Soit u^* et λ^* satisfaisant

$$\begin{cases} \nabla_u \mathcal{L}(u^*, \lambda^*) = 0 \\ \nabla_\lambda \mathcal{L}(u^*, \lambda^*) = 0 \\ y^T \nabla^2_{uu} \mathcal{L}(u^*, \lambda^*) y > 0,\ \forall y \neq 0 \text{ tel que } \nabla\theta(u^*)^T y = 0 \end{cases} \tag{1}$$

avec $\mathcal{L}$ le lagrangien du problème

$$(\mathcal{P}_0)\left\{\begin{array}{l}\min J(u)\\ \theta(u)=0\end{array}\right. .$$

On considère la famille de problèmes

$$(\mathcal{P})\left\{\begin{array}{l}\min J(u)\\ \theta(u)=\mu\end{array}\right.$$

paramétré par le vecteur $\mu \in \mathbb{R}^m$.

1. On veut montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $\forall \mu \in \mathcal{B}(0,r)$, il existe $u(\mu) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda(\mu) \in \mathbb{R}^m$ qui forment une paire minimum local-multiplicateur de Lagrange du problème $(\mathcal{P})$. $u(.)$ et $\lambda(.)$ sont $\mu - \mathcal{C}^1$ dans $\mathcal{B}(0,r)$ et $u(0) = u^*$ et $\lambda(0) = \lambda^*$.
   - Écrire explicitement $\mathcal{L}$ le lagrangien du problème $(\mathcal{P}_0)$ et $\mathcal{L}'$ le lagrangien du problème $(\mathcal{P})$, puis écrire le système d'équations avec multiplicateur de Lagrange associé au problème $\mathcal{P}$.
   - Calculer le jacobien de ce dernier système, et montrer qu'il est inversible.
   - En utilisant le théorème des fonctions implicites, en déduire la proposition 1.
2. Notons $P(\mu) = J(u(\mu))$ le coût optimal, montrer que

$$\nabla_\mu P(\mu) = -\lambda(\mu),\ \forall \mu \in \mathcal{B}(0,r).$$

Exercice

Étant donné $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}$, on considère le problème d'optimisation suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \left\{\begin{array}{l}\text{Minimiser } f(x) := \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle\\ \text{sous la contrainte } \|x\| = 1.\end{array}\right.$$

1°) On suppose $b = 0$. Rappeler alors ce que vaut $\bar{f} = \inf\{f(x) : \|x\| = 1\}$ et quels sont les $\bar{x}$ de norme 1 pour lesquels $f(\bar{x}) = \bar{f}$.

2°) Soit λ_1 la plus grande valeur propre de A et p un réel strictement inférieur à $-\lambda_1$. On pose

$$A_p := A + pI_n, \quad f_p : x \in \mathbb{R}^n \mapsto f_p(x) := \frac{1}{2}\langle A_p x, x\rangle + \langle b, x\rangle.$$

(a) Indiquer pourquoi f_p est strictement concave.

(b) On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(\tilde{\mathcal{P}}_p) \quad \left\{\begin{array}{l}\text{Minimiser } f_p(x)\\ \|x\| \le 1.\end{array}\right.$$

Montrer que

$$\inf\{f_p(x) : \|x\| \leq 1\} = \inf\{f(x) : \|x\| = 1\} + \frac{1}{2}\, p$$

et que les solutions de $(\mathcal{P})$ et $(\tilde{\mathcal{P}}_p)$ sont les mêmes.