ENS Cachan, DPT Maths

Optimisation numérique M1 – TD7 – Optimisation sous contraintes 3

Florian De Vuyst, Adrien Le Coënt - CMLA UMR 8536, ENS Cachan

10 Novembre

Un problème d'approximation matricielle

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ structuré en espace euclidien grâce au produit scalaire usuel $\langle\langle A, B\rangle\rangle := tr(A^\top B)$; on note $|||\cdot|||$ la norme matricielle associée.

Soit

$$S := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid det\ M = 1\};$$

$$\Sigma := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M \text{ est orthogonale et } det\ M = 1\}.$$

L'objet de l'exercice est de montrer que les matrices de S les plus proches de l'origine (au sens de la distance induite par $|||\cdot|||$) sont les matrices de Σ.

1. Formaliser le problème énoncé ci-dessus commme celui de la minimisation d'une fonction différentiable sur une contrainte définie par une égalité.
2. (a) Grâce à la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre de Lagrange, montrer que toutes les matrices candidates à être solutions du problème sont orthogonales.
   (b) Vérifier que toutes les matrices orthogonales de déterminant 1 sont bien solutions du problème posé.

Minimisation d'une fonction quadratique sur le simplexe unité

Pour $n \geq 2$, soit

$$S := \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \text{ pour tout } i \text{ et } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

et

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto f(x) := \sum_{i \neq j} x_i x_j. \end{aligned}$$

1. f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^n$? concave sur $\mathbb{R}^n$? Mêmes questions à propos de la restriction de f à S.
2. Résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$(\mathcal{P}) \text{ Maximiser } f \text{ sur } S.$$

Maximisation d'une fonction produit sur la sphère-unité

Déterminer la valeur maximale de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto f(x) := \prod_{i=1}^{n} x_i^2. \end{aligned}$$

sous la contrainte $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$.

En déduire l'inégalité suivante, valable pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\left| \prod_{i=1}^{n} x_i \right| \leq \left(\frac{\|x\|}{\sqrt{n}} \right)^n,$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne usuelle dans $\mathbb{R}^n$.