ENS Cachan, DPT Maths

Optimisation numérique M1 – TD8 – Optimisation sous contraintes

Florian De Vuyst, Adrien Le Coënt - CMLA UMR 8536, ENS Cachan

17 novembre 2016

Exercice 1

Étant donné $s \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et $c \in \mathbb{R}^n$, on considère le problème de minimisation suivant :

$$(\mathcal{P}) \qquad \text{Minimiser } \left\{ \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle c, x \rangle \right\} \text{ sous la contrainte } \langle s, x \rangle \leq 0.$$

1°) Déterminer la fonction duale $\mu \in \mathbb{R}^+ \mapsto \psi(\mu)$ associée au lagrangien

$$\mathcal{L} : (x, \mu) \mapsto \mathcal{L}(x, \mu) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle c, x \rangle + \mu \langle s, x \rangle.$$

2°) Résoudre le problème dual $(\mathcal{D})$ associé à $(\mathcal{P})$, c'est-à-dire de la maximisation de ψ sur $\mathbb{R}^+$ (on sera amené à considérer plusieurs cas, suivant le signe de $\langle c, s \rangle$).

3°) Utiliser le résultat précédent pour résoudre effectivement $(\mathcal{P})$.

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel $\langle ., . \rangle$, on considère le problème d'optimisation suivant :

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \text{Minimiser } f(x) := \frac{1}{2}\langle Mx, x \rangle + \langle q, x \rangle \\ \text{sous la contrainte } Ax + b \leq 0, \end{cases}$$

où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive, $q \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

1°) Que peut-on dire des solutions de $(\mathcal{P})$? Ecrire les relations KKT.

2°) Déterminer la fonction duale Θ associée au lagrangien

$$\mathcal{L} : (x, \mu) \mapsto \mathcal{L}(x, \mu) := \frac{1}{2}\langle Mx, x\rangle + \langle q, x\rangle + \langle \mu, Ax + b\rangle.$$

3°) Formuler le problème dual $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$.
4°) Comment caractériser la solution $\bar{\mu}$ de $(\mathcal{D})$?
5°) Donner une condition suffisante pour que $(\mathcal{D})$ ait une solution unique.
6°) Comment une solution $\bar{\mu}$ de $(\mathcal{D})$ permettrait-elle de retrouver la solution de $(\mathcal{P})$?

Exercice 3

Soit Λ_n le simplexe-unité de $\mathbb{R}^n$:

$$\Lambda_n = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i,\ x_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}.$$

Étant donné $r_1, \ldots, r_n$ des réels tous strictement positifs, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}^m$, on considère le problème de minimisation suivant :

$$(\mathcal{P}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \log\left(\frac{x_i}{r_i}\right) \\ \text{sous les contraintes } x \in \Lambda_n \text{ et } Ax \leq c, \end{array} \right.$$

où $\alpha \log \alpha$ est prise égale à 0 pour $\alpha = 0$ et la notation $Ax \leq c$ signifie $(Ax)_i \leq c_i$ pour toutes les composantes i.

Soit

$$(x, \mu) \in \Lambda_n \times (\mathbb{R}^+)^m \mapsto \mathcal{L}(x, \mu) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log\left(\frac{x_i}{r_i}\right) + \langle \mu, Ax - c\rangle$$

le lagrangien dans le problème $(\mathcal{P})$ et

$$\mu \in \left(\mathbb{R}^+\right)^m \mapsto \psi(\mu) = \inf_{x \in \Lambda_n} \mathcal{L}(x, \mu)$$

la fonction duale associée. Montrer que

$$\psi(\mu) = -\log\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\, e^{-(A^T\mu)_i + \langle \mu, c\rangle}\right)$$

et formuler le plus simplement possible le problème dual $(\mathcal{D})$ de $(\mathcal{P})$.