ENS Cachan, DPT Maths

Optimisation numérique M1 – TD8 – Optimisation sous contraintes

Florian De Vuyst, Adrien Le Coënt - CMLA UMR 8536, ENS Cachan

24 novembre 2016

Algorithme d'Uzawa

Soit le problème primal

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{c} J(u) = \inf_{v \in U} J(v) \\ u \in U := \{v \in V; \phi_i(v) \leq 0,\ 1 \leq i \leq m\} \end{array} \right. \tag{1}$$

et son dual

$$(\mathcal{Q}) \left\{ \ \lambda \in \mathbb{R}_+^m,\ G(\lambda) = \sup_{\mu \in \mathbb{R}_+^m} G(\mu). \right. \tag{2}$$

Méthode d'Uzawa :

Partant d'un élément $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+^m$ arbitraire, la suite de couples $(\lambda^k, u^k) \in \mathbb{R}_+^m \times V,\ k \geq 0$ est défini par les formules de récurrences suivantes

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{\lambda k}: & J(u_{\lambda k}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \phi_i(u_{\lambda k}) = \inf_{v \in V} J(v) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \phi_i(v) \\ \lambda_i^{k+1}: & \lambda_i^{k+1} = \max\{\lambda_i + \rho \phi_i^k(u_{\lambda k}), 0\} \end{array} \right. \tag{3}$$

Convergence de la méthode d'Uzawa :

On suppose que $V = \mathbb{R}^n$, que la fonction J est elliptique, et que l'ensemble U, de la forme

$$U = \{v \in \mathbb{R}^n; Cv \leq d\}, C \in \mathcal{A}_{m,n}, d \in \mathcal{R}^m,$$

est non vide. Alors, si

$$0 < \rho < \frac{2\alpha}{\|C\|^2},$$

la suite (u^k) converge vers la solution unique du problème primal $(\mathcal{P})$.

Si le rang de C est m, la suite (λ^k) converge également,vers la solution unique du problème dual $(\mathcal{Q})$.

Algorithme de Arrow-Hurwicz

Soit n un entier positif. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne notée $|.|_n$ et du produit scalaire correspondant noté $(.,.)$. L'ensemble des matrices carées $n \times n$ est muni de la norme $\|B\|$ définie par $\|B\| = \max\{\frac{|Bx|_n}{|x|_n},\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0\}$. Soient A une matrice carrée $n \times n$ symétrique définie positive et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On note J l'application de $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v). \tag{4}$$

Soit m un entier et C une matrice $m \times n$. On pose $U = \{v \in \mathbb{R}^n,\ Cv = 0\}$. On considère le problème suivant : trouver $u \in U$ tel que

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v). \tag{5}$$

1. Montrer que le problème (5) admet une solution unique et écrire les conditions d'optimalité de Kuhn et Tucker. On notera λ le multilicateur de Lagrange.
2. Pour résoudre ce problème, on définit la méthode itérative suivante

   $$u^{k+1} = u^k - \rho_1(Au^k - b + C^t\lambda^k),\ \lambda^{k+1} = \lambda^k + \rho_1\rho_2 Cu^{k+1} \tag{6}$$

   ou $\rho_1,\ \rho_2 > 0$ sont des paramètres et (u^0, λ^0) sont donnés dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Montrer que si $\rho_1 > 0$ est suffisamment petit, on a

   $$\|I - \rho_1 A\| < 1 \tag{7}$$

   où I est la matrice identité. Dans la suite, on choisit ρ_1 tel que cette inégalité soit vérifiée et on pose $\beta = \|I - \rho_1 A\| < 1$.
3. Montrer que l'on a

   $$\left\{ \begin{array}{c} |\lambda^{k+1} - \lambda|_m^2 \leq |\lambda^k - \lambda|_m^2 + (\rho_1\rho_2)^2\|C^tC\||u^{k+1} - u|_n^2 \\ +2\rho_1\rho_2(C^t(\lambda^k - \lambda), u^{k+1} - u) \end{array} \right. \tag{8}$$

   En déduire que pour ρ_2 assez petit, on a :

   $$\left\{ \begin{array}{c} \gamma|u^{k+1} - u|_n^2 \leq (\dfrac{|\lambda^k - \lambda|_m^2}{\rho_2} + \beta|u^k - u|_n^2) \\ -(\frac{|\lambda^{k+1} - \lambda|_m^2}{\rho_2} + \beta|u^{k+1} - u|_n^2) \end{array} \right. \tag{9}$$

   où $\gamma = (-\rho_1^2\rho_2\|C^tC\| + 2 - 2\beta)$ est choisi strictement positif.
4. En déduire que l'on a $\lim_{k \mapsto \infty} u^k = u$.
5. Que peut on dire de la suite $(\lambda^k)_{k \in \mathbb{N}}$ lorsque la matrice C est de rang m ?
6. La méthode ci-dessus s'appelle la méthode d'Arrow-Hurwicz. Quel avantage cette méthode présente-t-elle par rapport à celle d'Uzawa ?